

EXPERIMENTALPHYSIK II: ELEKTRODYNAMIK

Prof. Dr. Thomas Müller

Vorlesung Sommersemester 2002

Letzte Aktualisierung und Verbesserung: 25. März 2004

Skript der Vorlesung EXPERIMENTALPHYSIK II
von Herrn Prof. Dr. THOMAS MÜLLER im Sommersemester 2002
von MARCO SCHRECK.

Dieses Skript erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit und Korrektheit.
Kommentare, Fehler, Vorschläge und konstruktive Kritik bitte an Marco.Schreck@gmx.de.

Inhaltsverzeichnis

1	Elektrodynamik	5
1.1	Grundlegende Beobachtungen	5
1.1.1	Ladung	6
1.1.2	Strom	7
1.1.3	Ladungstrennung:	7
1.1.4	Kraftwirkung	8
1.2	Die fundamentalen Bausteine und Kräfte der Natur	9
2	Elektrostatik	13
2.1	Das elektrische Feld und sein Potential	13
2.1.1	Das COULOMBgesetz	13
2.1.2	Kräfte verteilter Ladungen auf eine Probeladung	16
2.1.3	Das elektrische Feld	19
2.1.4	Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld	20
2.1.5	Der GAUSSsche Satz	23
2.1.6	Spannung und Potential	27
2.1.7	Divergenz des elektrischen Feldes	32
2.1.8	Beispiele von Feldern und Potential	35
2.2	Leiter und Isolatoren im elektrischen Feld	42
2.2.1	Sonderfall Kondensatoren	42
2.2.2	Energie von Feldern	46
2.2.3	Polarisation der Materie	47
2.2.4	Dielektrika im elektrischen Feld	49
3	Elektrische Ströme und ihre Felder	51
3.1	Die Kontinuitätsgleichung	52
3.2	Ströme und Schaltkreise	52
3.2.1	Das OHMSche Gesetz	52
3.2.2	Temperaturabhängigkeit von Widerständen	53
3.2.3	Stromleistung und Energie	56
3.2.4	Schaltungen, Netzwerke	56
3.2.5	Meßinstrumente	62
3.3	Stromquellen	65
3.3.1	Elektrochemische Prozesse	65
3.3.2	Galvanische Elemente/Batterien	69
3.3.3	Akkumulatoren	70
3.3.4	Thermoelektrizität	71
4	Statische Magnetfelder	75
4.1	Magnetfeld stationärer Ströme	77
4.1.1	Punktladung im Magnetfeld	77
4.1.2	Kräfte auf Ströme im Magnetfeld	80
4.1.3	Der HALL-Effekt	85
4.1.4	Magnetfelder von bewegten Ladungen	86
4.1.5	Magnetfeld von Strömen	87
4.1.6	Kräfte zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern	91

4.1.7	Das Ampèresche Gesetz	92
4.2	Das Magnetfeld und sein Potential	94
4.2.1	Mathematischer Einschub	94
4.2.2	Magnetischer Kraftfluß	96
4.2.3	Das Vektorpotential	97
4.3	Materie im Magnetfeld	97
4.3.1	Atomares Bild	98
4.3.2	Erscheinungsformen des Magnetismus	102
4.3.3	Stehende Kugel	107
5	Zeitabhängige elektrische und magnetische Felder	109
5.1	Induktion	110
5.1.1	Induktionsgesetz	114
5.1.2	Induktivität	114
5.1.3	Transformator	117
5.2	MAXWELLScher Verschiebungsstrom	118
5.3	Energie des elektrischen und magnetischen Feldes	119
5.4	Wechselstrom und Schaltkreise	121
6	Elektromagnetische Wellen	127
6.1	Die MAXWELLgleichungen und ihre Lösung im Vakuum	127
6.1.1	Spezielle Lösung: Ebene Welle in x -Richtung	128
6.1.2	Energie, Intensität einer elektromagnetischen Welle	129
6.1.3	Impuls von elektromagnetischen Wellen	131
6.2	Relativistische Betrachtungen	134
6.2.1	Einige Aussagen der „Speziellen Relativitätstheorie“	134
6.2.2	Abhängigkeit von elektrischen und magnetischen Feldern und deren Kräften von der Wahl des Bezugssystems	135
A	Rechenregeln für den Nabla-Operator	139

Kapitel 1

Elektrodynamik

Informationen gibt es unter:

www-ekp.physik.uni-karlsruhe.de/~mullerth

1.1 Grundlegende Beobachtungen

* Die Elektrizität ist seit jeher bekannt:

- Blitze, Licht, statische Aufladung von Haaren und Fellen, Magnetismus
- Griechen: Elektrum \equiv Bernstein
- GILBERT (1540-1603): Leibarzt der englischen Königin Elisabeth I.
Er entdeckt, daß die Erde ein Magnet ist und führt den Begriff „Elektrizität“ ein.
- COULOMB (1736-1806): Beginn der Elektrizitätslehre, Zeit der hohen Spannungen und kleinen Ströme, Ladungsforschung
- GALVANI (1737-1789): Untersucht **trocknende** Froschschenkel am Balkon, elektrische Fische und galvanische Elemente
- VOLTA (1745-1827): VOLTAsche Spannungsreihe, Batterien, Zeit der kleinen Spannungen und großen Ströme
- OERSTEDT (1777-1841): Entdeckt das Magnetfeld des stromdurchflossenen Leiters während der gr. Vorlesung
- AMPERE (1775-1836)
- OHM (1789-1854)
- FARADAY (1791-1867): Las als Laufbursche einer Bücherei viele Bücher
- GAUSS (1777-1855) und WEBER (1804-1890): Göttingen - Erdmagnetismus
- SIEMENS (1816-1892)
- KIRCHHOFF (1824-1887)
- MAXWELL (1831-1879)
- HERTZ (1857-1894): Bonn, Westflügel des Uni-Hauptgebäudes Kaiserplatz; vormals Karlsruhe
- EINSTEIN und FEYNMAN

* Es gibt verschiedene Phänomene:

- Ladung /Magnetismus
- Strom
- elektromagnetische Wellen

1.1.1 Ladung

Symbolisiert wird die Ladung durch Q bzw. q . Ladung ist die Eigenschaft eines Körpers/Teilchens, elektromagnetische Kraft auszuüben.

* Superpositionsprinzip:

$$F(Q_1 + Q_2, Q) = F(Q_1, Q) + F(Q_2, Q); F(n \cdot Q_1, Q) = n \cdot F(Q_1, Q)$$

* Polarität :

- Positive Ladung: \oplus
Sammelt sich beispielsweise auf geriebenem Glasstab. Beispiele sind Protonen oder positive Ionen.
- Negative Ladung: \ominus
Sammelt sich zum Beispiel auf geriebenem Porzellan, Gummi. Als Beispiel seien Elektronen genannt.

Konsequenz:

$\oplus\oplus, \ominus\ominus \Rightarrow$ Abstoßung

$\ominus\oplus, \oplus\ominus \Rightarrow$ Anziehung

Abstoßung gibt es jedoch bei der Gravitation nicht.

* Quantelung:

Für freie Ladungen gilt:

$$Q = \pm n \cdot e \text{ mit } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb}$$

Dies ist die Elementarladung.

Beispiele:

- Elektron (Symbol: e^-): $Q = -e$
- Positron (Symbol: e^+): $Q = +e$
- Proton (Symbol: p): $Q = +e$
- Neutron (Symbol: n): $Q = 0$
- Neutrino (Symbol: ν): $Q = 0$
- Photon (Symbol: γ): $Q = 0$
- Quarks: u, c, t: $Q = +\frac{2}{3}e$, d, s, b: $-\frac{1}{3}e$
Quarks treten jedoch nur gebunden auf, so daß $Q = 0, \pm 1e$. Dieser Zusammenhang ist noch **nicht verstanden**.

* Ladungserhaltung:

In allen Prozessen ist die Gesamtladung erhalten.

Beispiel:

Für folgende Umwandlung zwischen Elementarteilchen gilt:

$$\underbrace{n}_0 \mapsto \underbrace{p}_{1e} + \underbrace{e^-}_{-1e} + \underbrace{\nu}_0 : Q = 0$$

Die Gesamtladung ändert sich somit nicht; sie bleibt erhalten:

$$\sum_i Q_i = 0$$

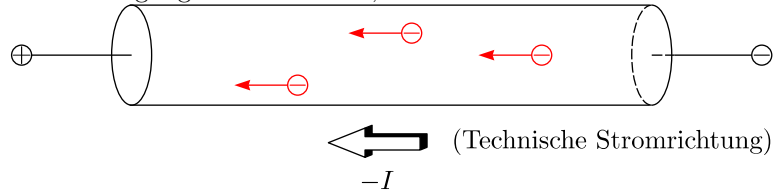
Ladung hängt nicht von Bewegungszustand ab (anders als Masse).

1.1.2 Strom

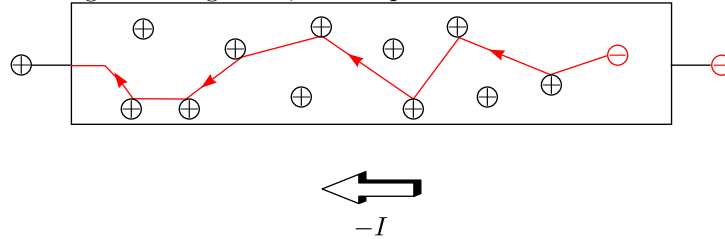
Symbolisiert wird der Strom durch I bzw. i . Bewegte Ladungsträger ergeben einen Strom.

- Arten von Ströme:

– Freie Bewegung durch Vakuum, Gas



– Leitung in Flüssigkeiten, Festkörpern

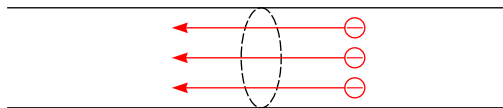


- Arten von elektrischen Leitern:

- „Leiter“: Elektronen frei beweglich wie ein Gas (Beispiel: Metalle)
- Halbleiter: Elektronen gebunden, frei oberhalb einer Energieschwelle
- Isolatoren: Elektronen festgebunden, nur leicht verschiebbar

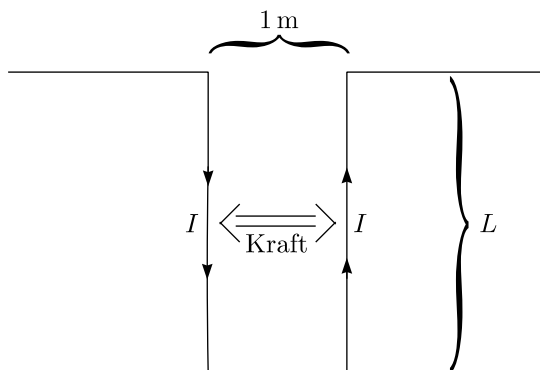
* Stromstärke:

$$[I] = 1 \text{ Ampère} \equiv 1 \text{ A} \equiv \frac{1 \text{ C}}{\text{s}}$$



$$6 \cdot 10^{18} \frac{e^-}{\text{s}} \hat{=} 1 \text{ A}$$

1 A ist definiert durch die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern:

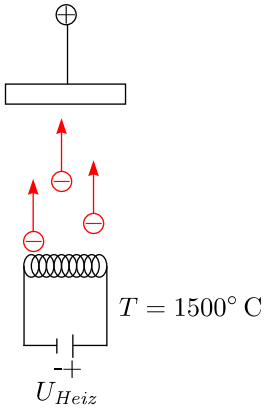


Für $L = 1 \text{ m}$ und $I = 1 \text{ A}$ folgt $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$.

1.1.3 Ladungstrennung:

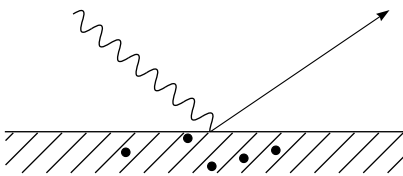
* Mechanisch: Reiben von Gegenständen

* Thermisch: Glühemission



* Induktion: Zeitlich veränderliche Magnetfelder

* Photoeffekt: Energieübertragung vom Photon auf das Elektron

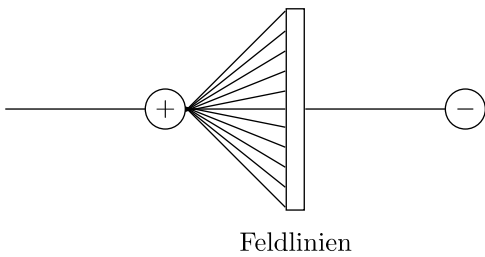


Hierfür hat EINSTEIN seinen Nobelpreis erhalten.

* Chemisch: Dissoziation

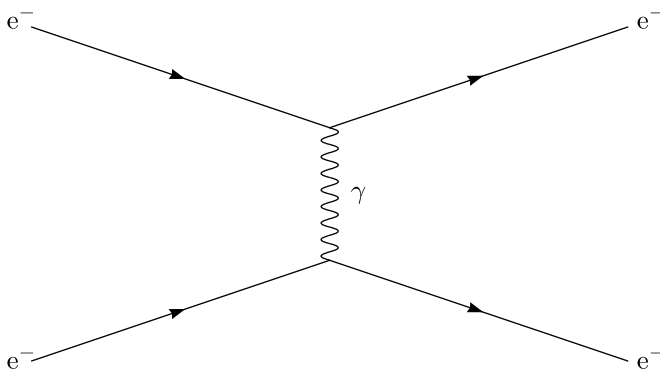
1.1.4 Kraftwirkung

Analog zur Gravitation: Fernwirkung durch elektromagnetische Felder



Feldlinien

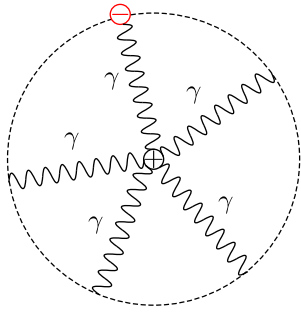
Zeigt Weg der Kraftübertragung



Kraftstoß durch Austausch eines Photons

Heutige Vorstellung:

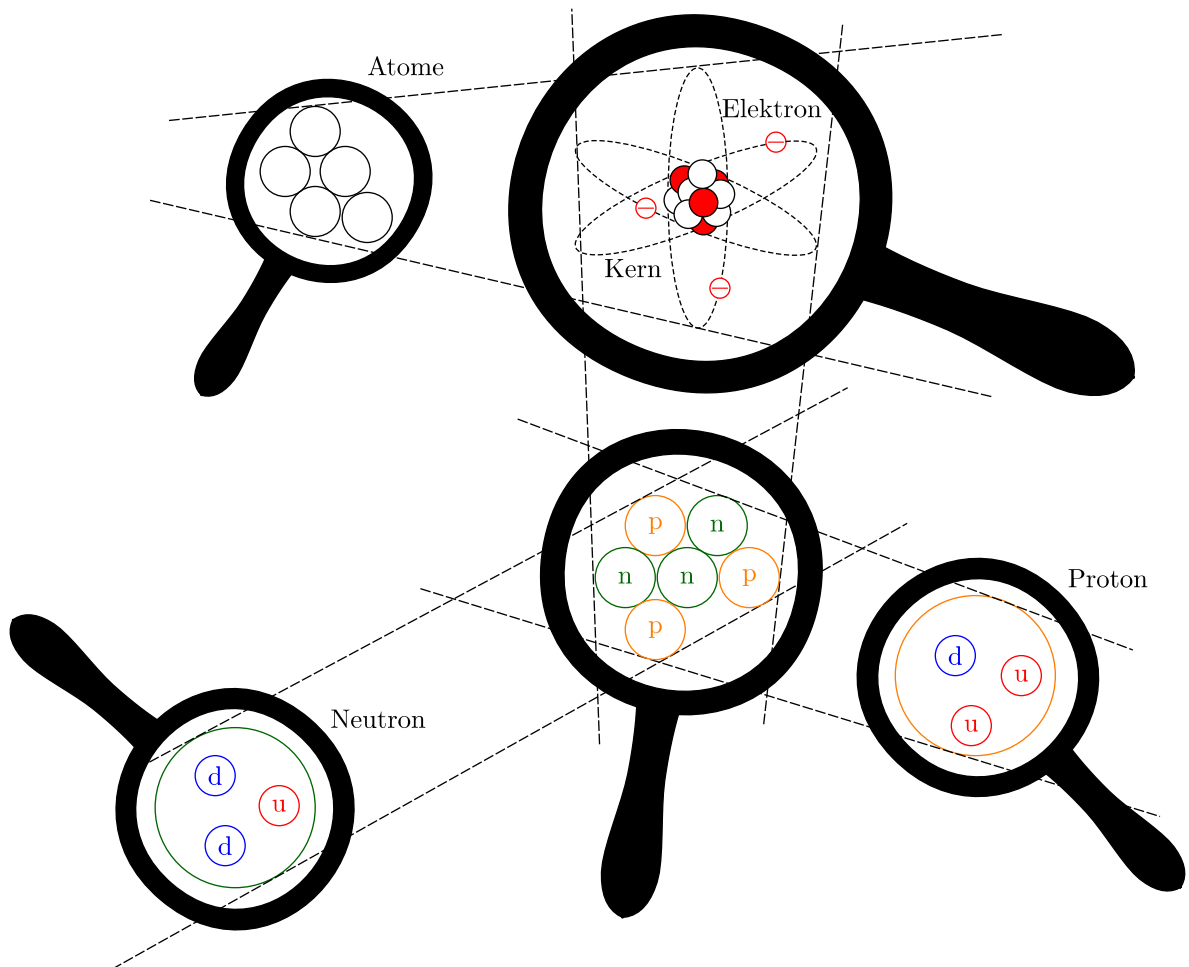
Die elektrische Kraft wird durch Austausch von Photonen hervorgerufen.



Virtuelle Photonen erzeugen das elektrische Feld.

1.2 Die fundamentalen Bausteine und Kräfte der Natur

1. Natur besteht aus Atomen



$$\text{d-Quark: } Q = -\frac{1}{3}e$$

$$\text{u-Quark: } Q = +\frac{2}{3}e$$

Materie:

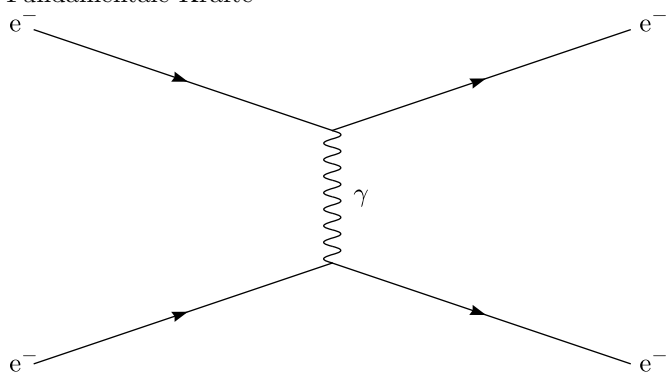
i.) Quarks:

u	c	t	$Q = +\frac{2}{3}e$
d	s	b	$Q = -\frac{1}{3}e$
up	charm	top	
down	strange	bottom	

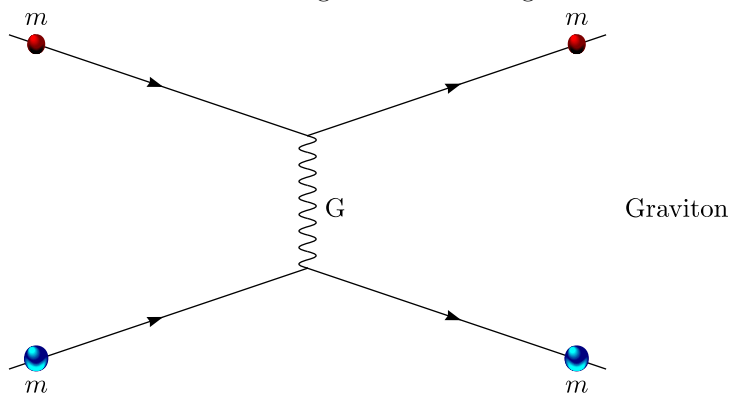
ii.) Leptonen:

e^-	μ^-	τ^-	$Q = -e$
ν_e	ν_μ	ν_τ	$Q = 0$
Elektron	Myon	Tau-Lepton	
Neutrino	Neutrino	Neutrino	

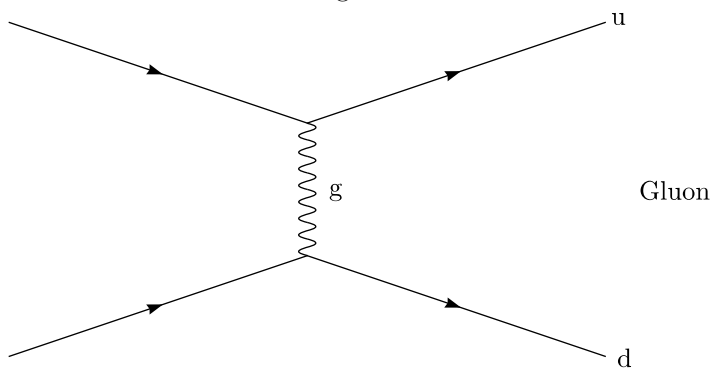
2. Fundamentale Kräfte



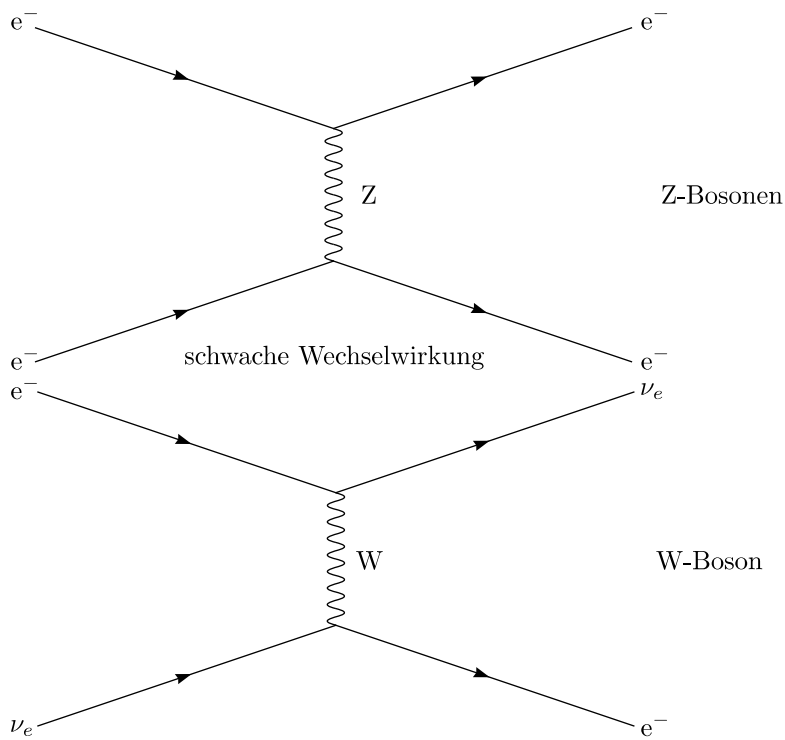
Photonen sind die Überträger der elektromagnetischen Wechselwirkung.



Gravitonen sind die Überträger der Gravitation.



Gluonen übertragen die starke Wechselwirkung.



Wechselwirkung	relative Stärke	Reichweite	Feldquant \equiv Kraftteilchen
Gravitation	10^{-38}	unendlich	Graviton, ($m(G)=0$)
Schwache	10^{-5}	10^{-18} m	W,Z-Boson ($m(W)=81 \frac{\text{GeV}}{c^2}, m(Z)=91 \frac{\text{GeV}}{c^2}$)
Elektromagnetische	10^{-3}	unendlich	Photon ($m(\gamma)=0$)
Starke	1	10^{-15} m	Gluon ($m(g)=0$)

Materieteilchen senden Kraftteilchen aus.

Kapitel 2

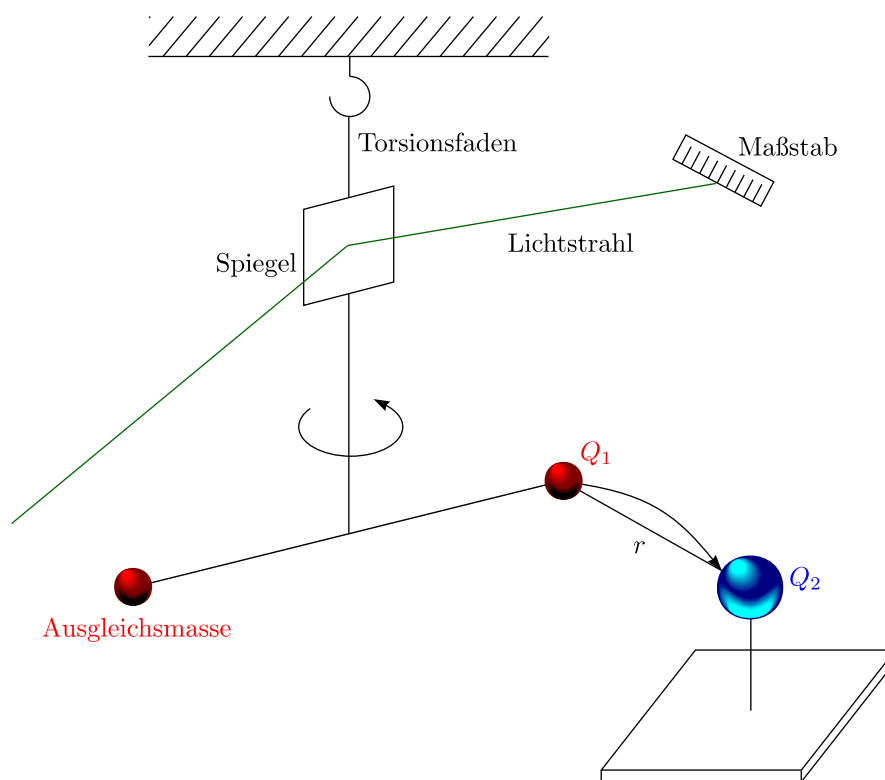
Elektrostatik

2.1 Das elektrische Feld und sein Potential

2.1.1 Das Coulombgesetz

Charles Coulomb (1736-1806):

Untersuchungen mit Drehwaage:



Elektromagnetische Kraft zwischen Q_1, Q_2 im Gleichgewicht mit Rückstellkraft des Torsionsfadens.

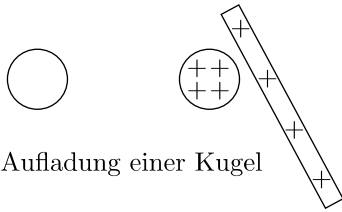
Befund:

$$\left. \begin{array}{l} F_{12} \propto Q_1 \\ F_{12} \propto Q_2 \end{array} \right\} F_{12} \propto Q_1 \cdot Q_2 \text{ (Superpositionsprinzip)}$$

Illustration:

Nimm 2 Korkkugelchen und führe folgendes Experiment durch:

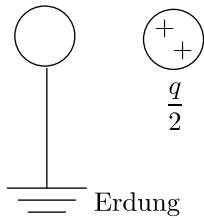
* Teil ①:



* Teil ②:



* Teil ③:



* Teil ④:



Dann ergibt sich schließlich für die Kraft F'_{12} zwischen den neuen Ladungen:

$$F'_{12} = \frac{1}{4} F_{12}$$

Daraus ergibt sich dann folgende Proportionalität:

$$F_{12} \propto Q_1 \cdot Q_2$$

Coulombgesetz:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \vec{e}_{12}$$



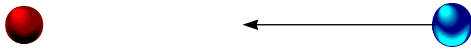
Nach dem 3. NEWTONSchen Axiom ist die Kraft genauso groß wie deren Gegenkraft:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Wenn Q_1 positiv ist, dann ist Q_2 negativ.

$$\vec{F}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{r^2} \cdot \vec{e}_{12}$$

$$\vec{e}_{12} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



$\epsilon_0 \triangleq$ Elektrische Feldkonstante

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \equiv 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$$

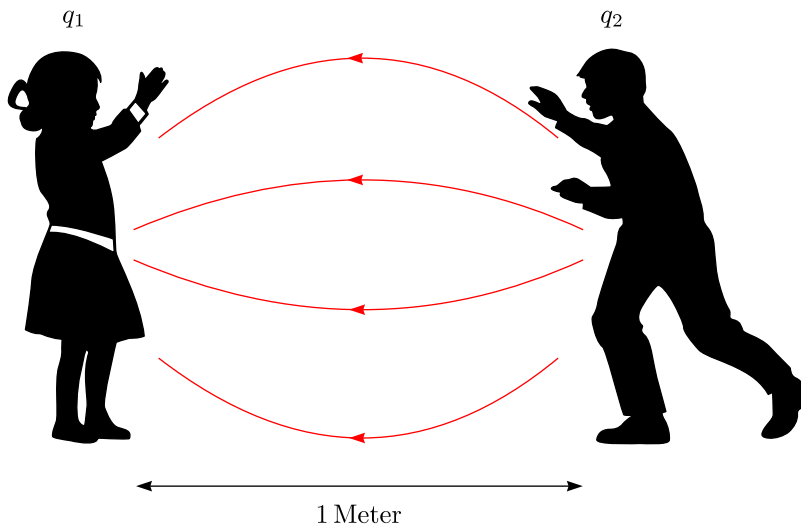
Vergleich von Coulomb- und Gravitationskraft:

Gravitation: $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_{12}$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{F}_C|}{|\vec{F}_G|} = \frac{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{r^2}}{G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 G} \cdot \frac{Q_1 Q_2}{m_1 m_2} \approx 10^{36} \text{ f\u00fcr 2 Protonen (!)}$$

Die Natur ist elektrisch neutral.

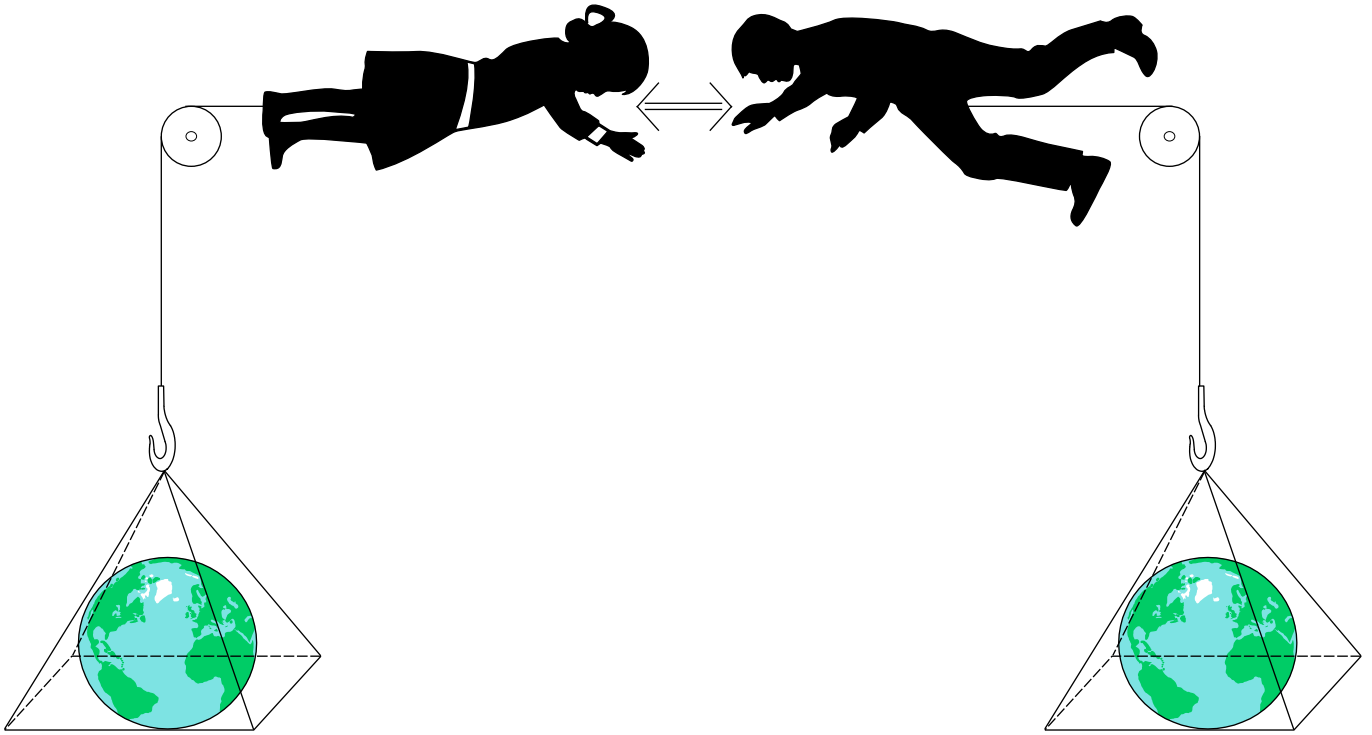
Illustration:



Gravitationskraft:

$$F_{12} \approx \frac{1}{1000} \text{ N}$$

Wenn alle M\u00e4nner 1% mehr Elektronen als Protonen, alle Frauen 1% mehr Protonen als Elektronen h\u00e4tten ...



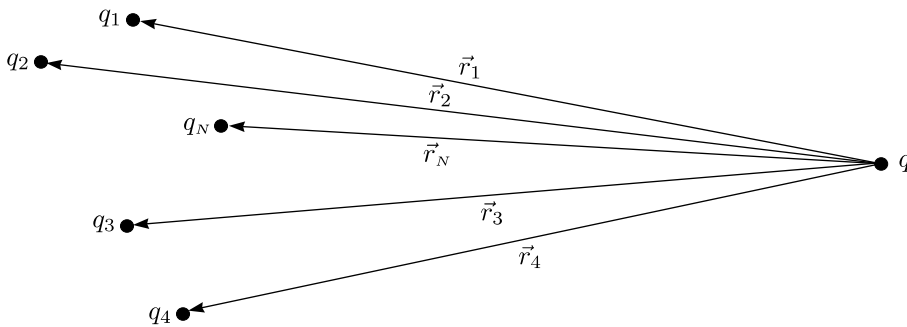
2.1.2 Kräfte verteilter Ladungen auf eine Probeladung

- * COULOMBgesetz: Kraft zwischen zwei punktförmigen Ladungen

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{e}_r$$

- * Kraft von N Ladungen q_i auf Punktladung q

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|}$$

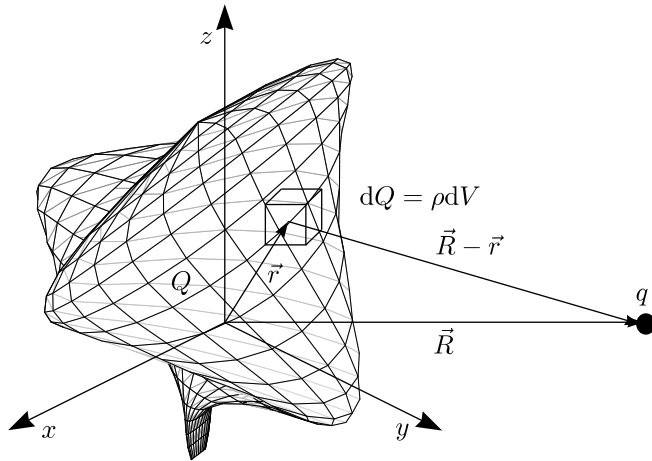


(Superpositionsprinzip)

- * Kraft durch kontinuierliche Ladungsverteilung:

Diese Ladungsverteilung beinhaltet praktisch unendlich viele Ladungen, deren einzelnen Werte gegen 0 gehen:

$$Q_i \mapsto 0, N \mapsto \infty$$



Wir führen die Ladungsdichte ρ ein.

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}, [\rho] = \frac{C}{m^3}$$

$$dQ = dV \cdot \rho(\vec{r})$$

Demnach berechnet sich die Kraft durch den folgenden Grenzübergang:

$$\vec{F}(\vec{R}) = \lim_{\substack{\Delta Q_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \Delta Q_i \cdot \frac{\vec{R} - \vec{r}_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3} = \lim_{\substack{\Delta V_i \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \rho \cdot \Delta V_i \cdot \frac{\vec{R} - \vec{r}_i}{|\vec{R} - \vec{r}_i|^3} = \boxed{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \cdot \rho(\vec{r}) d^3\vec{r}}$$

Die Summe geht also hierbei in ein Volumenintegral über. Für die Gesamtladung selbst folgt durch Integration über die Ladungsdichte:

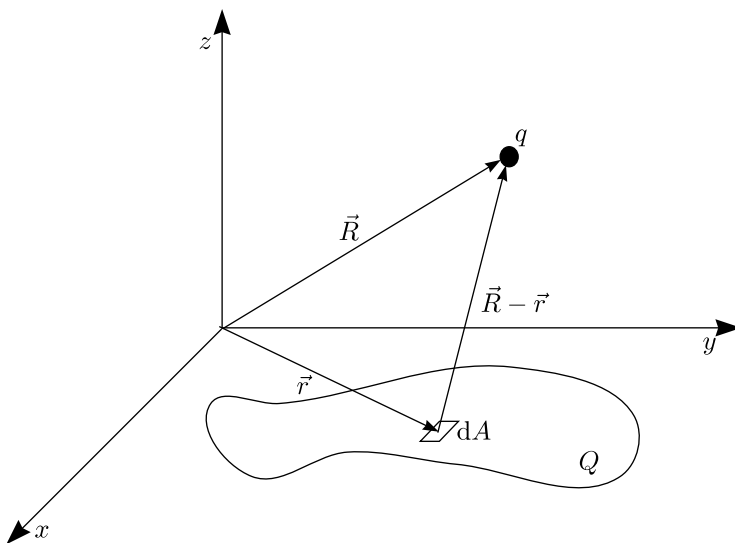
$$\boxed{Q = \int_V \rho(\vec{r}) d^3r}$$

* Kraft einer Flächenladungverteilung

Hier arbeiten wir mit der sogenannten Flächenladungsdichte, welche folgendermaßen definiert ist:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A} = \frac{dQ}{dA}, [\sigma] = \frac{C}{m^2}$$

$$\boxed{\vec{F}(\vec{R}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \sigma(\vec{r}) d^2r}$$



Die Gesamtladung berechnet sich durch Integration über die Fläche:

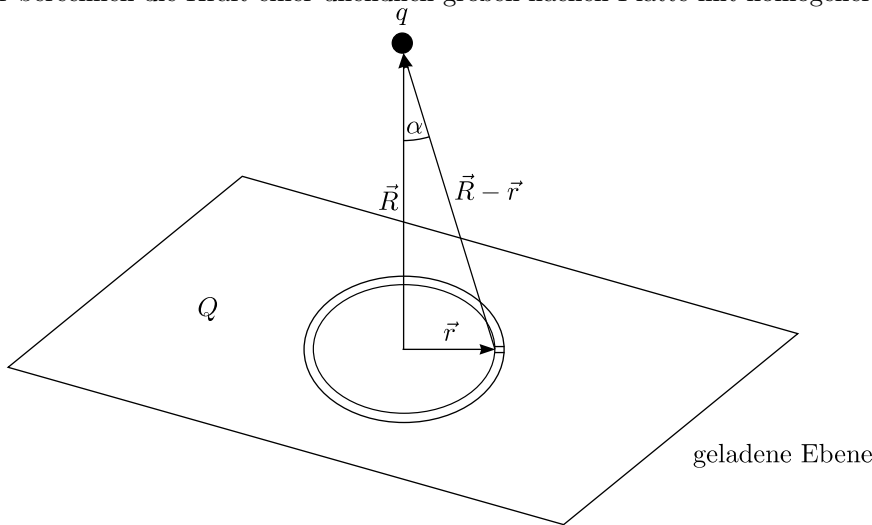
$$Q = \int_A \sigma(\vec{r}) d^2r$$

* Kraft einer eindimensionalen Ladungsverteilung

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_P \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \lambda(\vec{r}) ds$$

Beispiel:

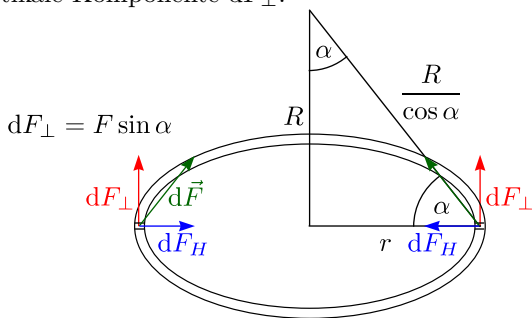
Wir berechnen die Kraft einer unendlich großen flachen Platte mit homogener Ladungsverteilung auf q :



$$dQ = \sigma \cdot dA$$

$$d\vec{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma dA}{|\vec{R} - \vec{r}|^2} \cdot \vec{e}_{\vec{F}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma dA}{\frac{R^2}{\cos^2 \alpha}} \cdot \vec{e}_{\vec{F}}$$

Die horizontale Komponente von $d\vec{F}$ mittelt sich aufgrund der Rotationssymmetrie weg, es verbleibt nur die vertikale Komponente dF_{\perp} .



$$dF_{\perp} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dA}{\frac{R^2}{\cos^2 \alpha}} \cdot \cos \alpha$$

Gesamtkraft vom Ringelement:

$$dF_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi r dr}{R^2} \cos^3 \alpha$$

Mit $r = R \cdot \tan \alpha$ folgt:

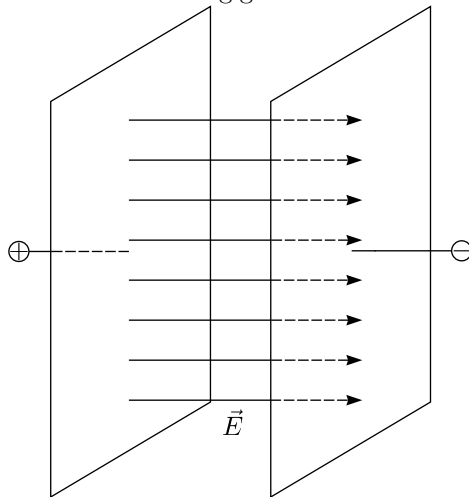
$$\frac{dr}{d\alpha} = \frac{R}{\cos^2 \alpha}$$

$$dF_R = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma \cdot 2\pi}{R^2} \cdot R \cdot \tan \alpha \cdot \frac{R}{\cos^2 \alpha} \cdot d\alpha \cdot \cos^3 \alpha = \frac{q}{2\epsilon_0} \sigma \cdot \sin \alpha d\alpha$$

Gesamtkraft auf q :

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dF_R = \frac{q \cdot \sigma}{2\epsilon_0}$$

Sie ist somit unabhängig vom Abstand R .



2.1.3 Das elektrische Feld

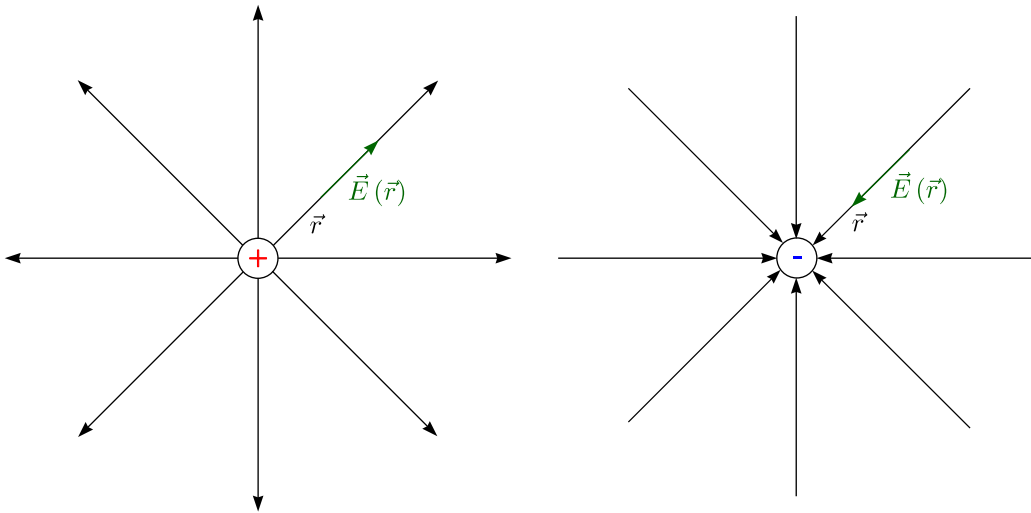
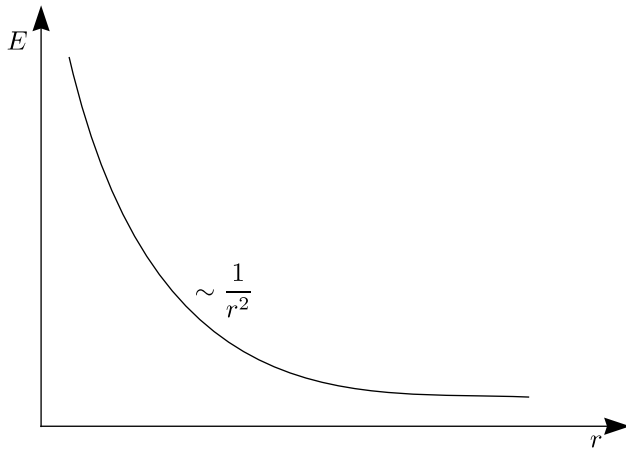
$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q}$$

Die elektrische Feldstärke ist also definiert als Kraft einer Ladungsverteilung auf q , dividiert durch q .

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

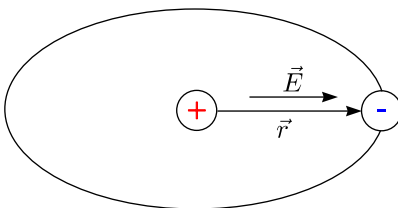
Punktladung:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



Beispiele:

- * Interplanetarischer Raum: $10^{-3} \frac{\text{N}}{\text{C}}$
- * Zündung in trockener Luft bei $3 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$
- * VAN DER GRAAF Generator: bis $10^6 \frac{\text{N}}{\text{C}}$
- * In Atomen: $10^9 \frac{\text{N}}{\text{C}}$



- * In Kernen: $5 \cdot 10^{20} \frac{\text{N}}{\text{C}}$

2.1.4 Bewegung einer Ladung im elektrischen Feld

Bewegt sich eine Ladung in einem elektrischen Feld, so erfährt diese eine Kraft und wird infolgedessen beschleunigt. Nach NEWTON gilt somit:

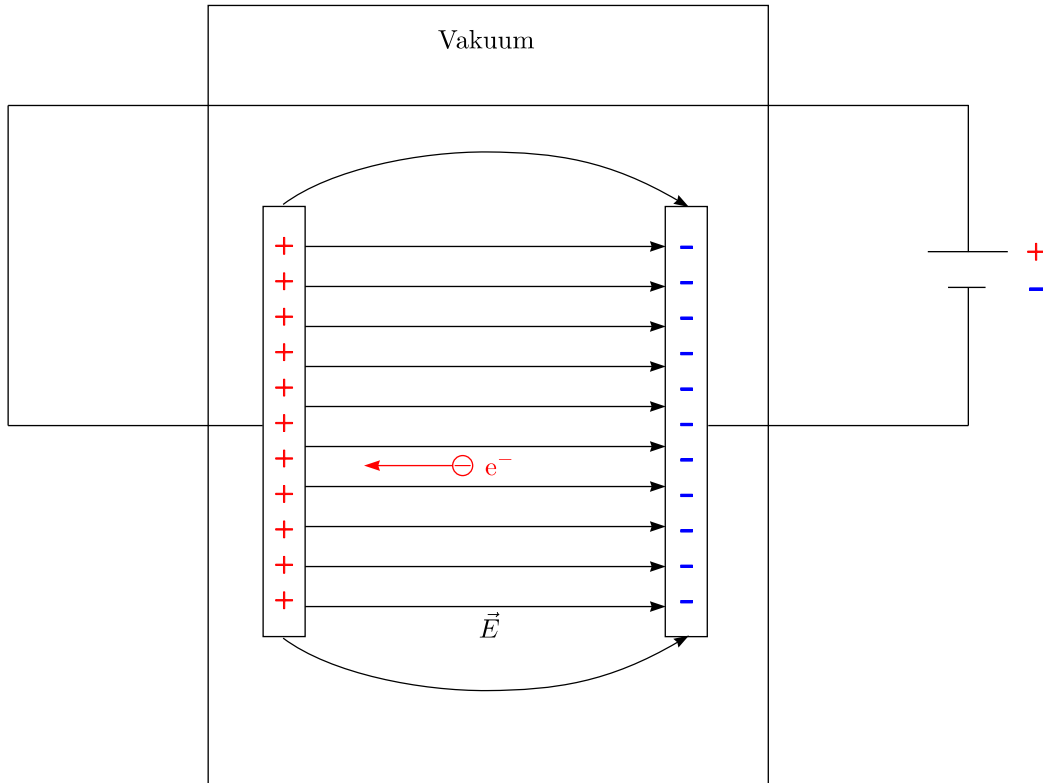
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Mit $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ folgt hier:

$$\vec{a} = \frac{q \cdot \vec{E}}{m}$$

Beispiel: Beschleunigung im homogenen Feld

a.) Ladung am Anfang ruhend; Beispiel: Elektron



$$F = e \cdot E = m_{e^-} \cdot a = \text{const.}$$

Die Beschleunigung sei konstant.

$$a = \frac{eE}{m_{e^-}}$$

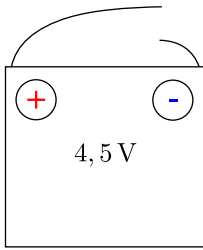
$$x(t) = \frac{eE}{2m_{e^-}} t^2$$

$$v(t) = \frac{eE}{m_{e^-}} t$$

Nach Durchlaufen der Strecke L hat das Elektron somit die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2eE}{m_{e^-}} L}$$

Beispiel: Beschleunigung durch Feld einer Batterie

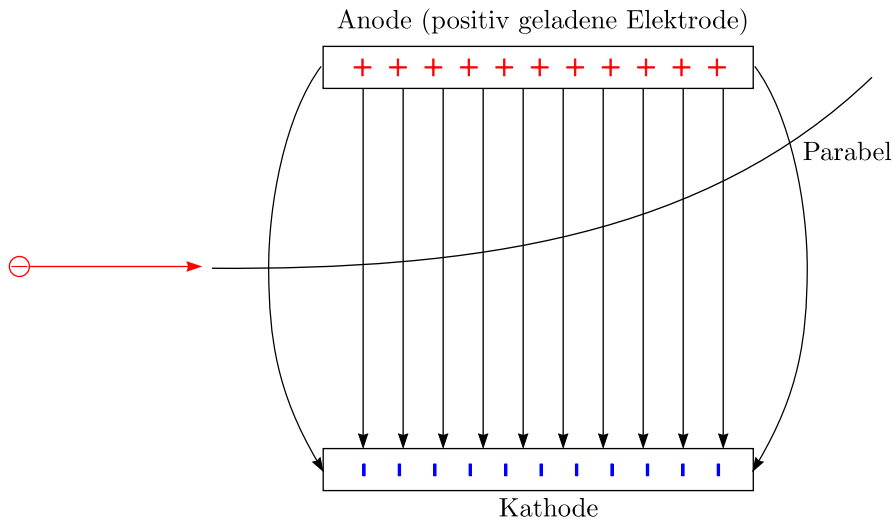


$$L = 1 \text{ cm}$$

$$E = \frac{4,5 \text{ V}}{\text{cm}} = 450 \frac{\text{V}}{\text{m}} \left(= 450 \frac{\text{N}}{\text{C}} \right)$$

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 450 \frac{\text{N}}{\text{C}}}{9 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \cdot 10^{-2} \text{ m}} \approx 1,3 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b.) Bewegung senkrecht zum Feld



Für die Beschleunigung ergibt sich hier vektoriell, da die beschleunigende Kraft nur in Richtung der y -Achse wirkt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{eE}{m_{e^-}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeit $v(t)$ und der zurückgelegte Weg $s(t)$ folgt durch Integration:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ \frac{eE}{m_{e^-}} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

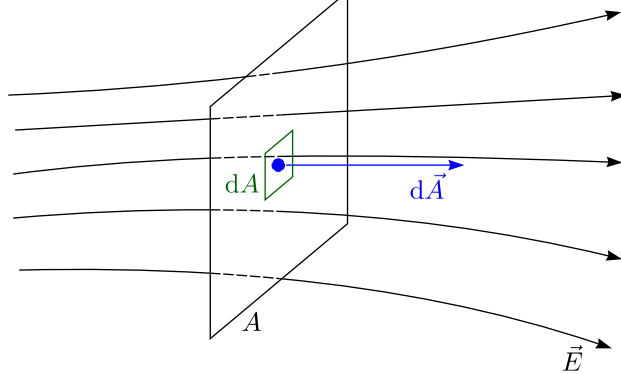
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \\ \frac{eE}{2m_{e^-}} t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus resultiert die Bahnkurve:

$$y = \frac{eE}{2m_{e^-} v_0^2} x^2$$

2.1.5 Der Gaußsche Satz

Betrachtung des Feldes als Fluß:



Der Fluß ϕ durch das Flächenelement $d\vec{A}$ (Flächennormale für dA) ist folgendermaßen definiert:

$$\phi \equiv \int \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Wir unterscheiden dabei folgende Fälle:

* $|\vec{E}| = \text{const.}, \vec{E} \parallel \vec{A}$:

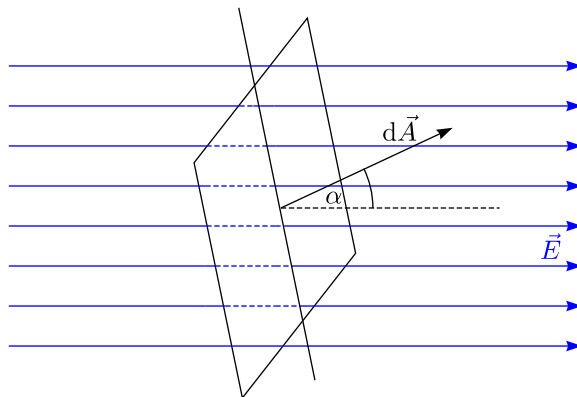
$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = E \, dA$$

Somit folgt für ϕ :

$$\phi = E \cdot A$$

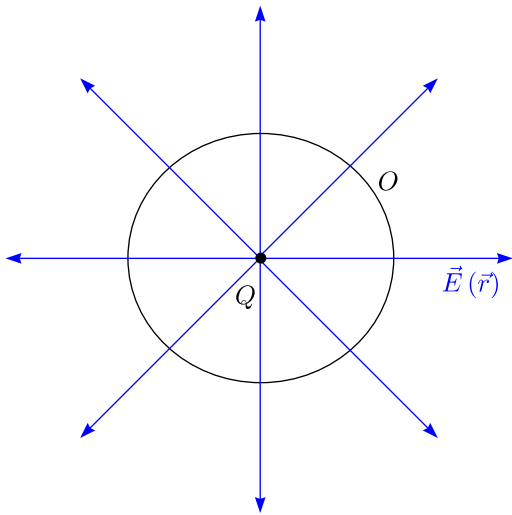
* $|\vec{E}| = \text{const.}, \vec{E} \not\parallel \vec{A}$:

$$\vec{E} \cdot d\vec{A} = |\vec{E}| \cdot |d\vec{A}| \cdot \cos \alpha$$

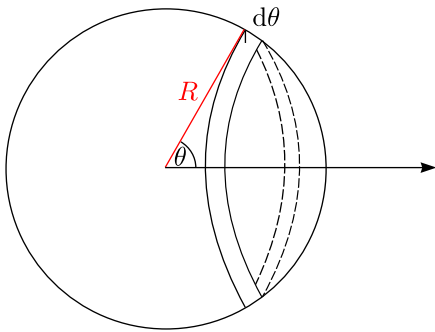


Für $\alpha = 90^\circ$ ergibt sich $\phi = 0$.

* COULOMBfeld, Fluß durch Kugelfläche im Abstand R :



$$\phi = \int_O \vec{E}(\vec{R}) d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_O \vec{e}_R d\vec{A} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_O dA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$



Hier sei folgender Hinweis gegeben:

$$\int_O dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 4\pi R^2$$

Gaußscher Satz:

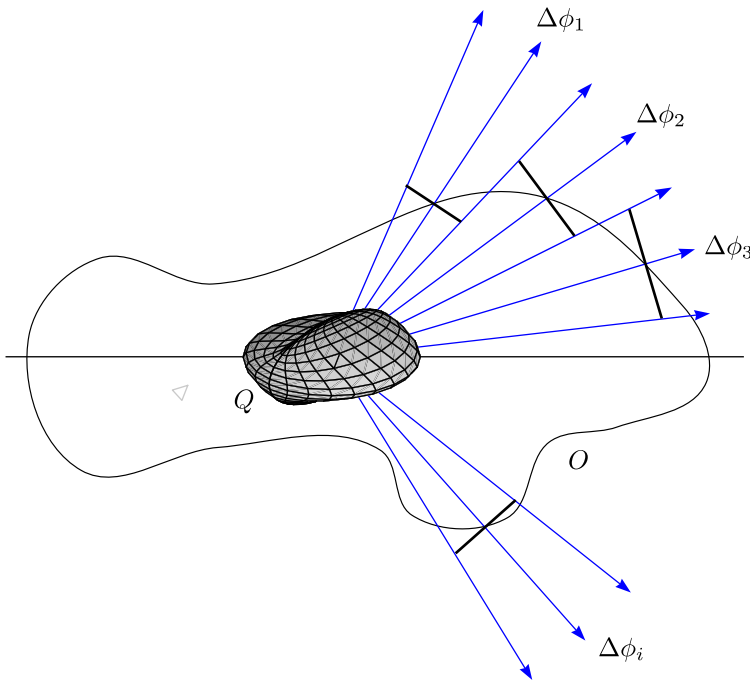
$$\phi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Fluß aus beliebiger geschlossener Fläche ist proportional zur umschlossenen Ladung Q , unabhängig von der Ladungsverteilung.

Bemerkung:

Der GAUSSsche Satz gilt für alle Felder mit einem $\frac{1}{r^2}$ Abstandsverhalten.

Illustration:



$\Delta\phi = \text{const.}$

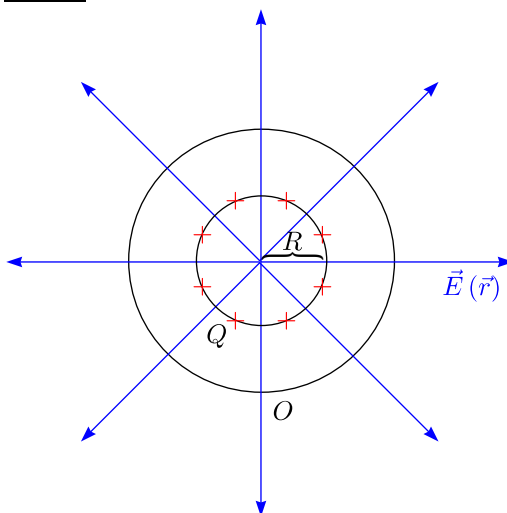
Der Fluß durch eine Teilfläche ist bei konstantem Öffnungswinkel unabhängig vom Abstand, daher gilt $\Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 = \dots = \Delta\phi_i$.

Anwendung:

1. Bestimme elektrisches Feld außerhalb und innerhalb einer positiv geladenen Kugelfläche.

Lösung:

a.) Außen:



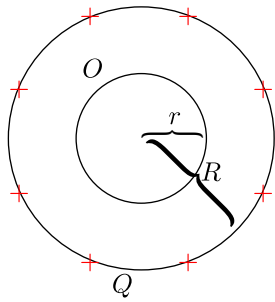
Definiere geschlossene Oberfläche (GAUSSsche Fläche)

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int_O \vec{E} \, d\vec{A} = E \int_0 dA = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

b.) Innen:

$r < R$:



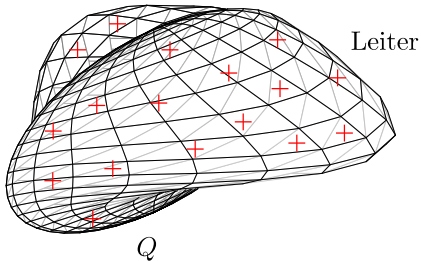
$$\text{GAUSS: } 0 = \int E \, dA = 4\pi r^2 E$$

Das elektrische Feld ist im Innern somit gleich 0:

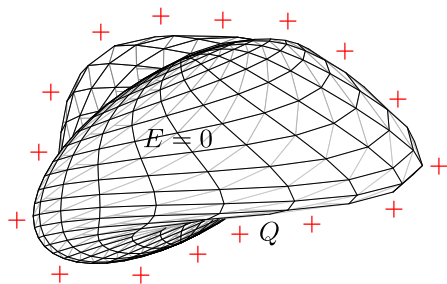
$$E = 0$$

2. Demonstration:

Elektrische Felder verschwinden innerhalb von leitenden Materialien.

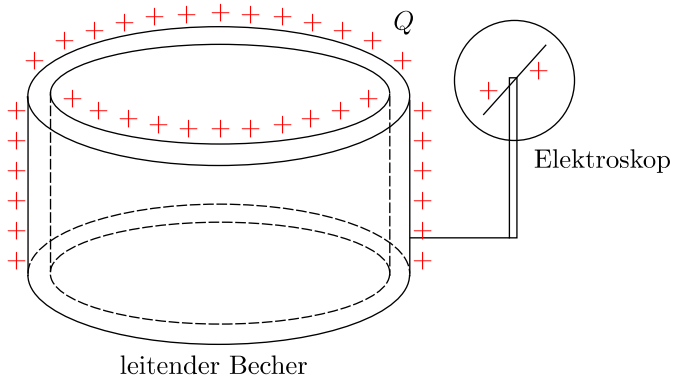


Die Ladungen sind beweglich und stoßen sich somit ab.



Dies ist der bekannte **Faraday-Effekt**.

Demo: Ladungstransport



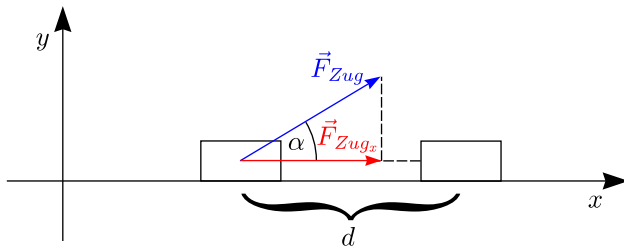
2.1.6 Spannung und Potential

Wird Ladung im elektrischen Feld verschoben, wird Arbeit geleistet, die zur Änderung der potentiellen bzw. kinetischen Energie führt.

Nomenklatur:

- * Arbeit: A, W
- * Potential: ϕ, V
- * Kinetische Energie: K, T, E_{kin}
- * Potentielle Energie: U, E_{pot}
- * Spannung: U

a.) Arbeit:



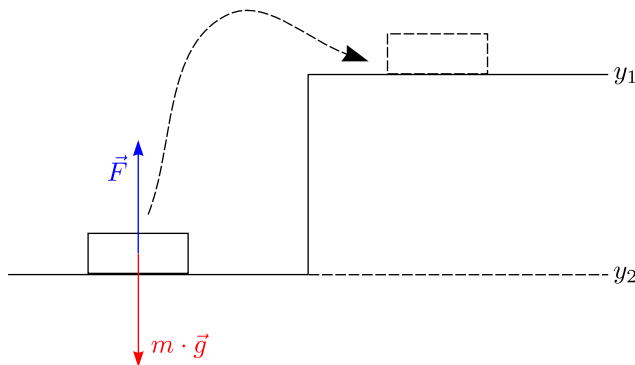
Die Arbeit ist allgemein definiert als Produkt aus Kraft und Weg:

Arbeit \equiv Kraft \times Weg

$$W = \int \vec{F} \, d\vec{s}$$

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \alpha$$

Wenn $\alpha = 90^\circ$ ist die geleistete Arbeit W gleich 0. Arbeit wird durch eine Kraft geleistet, die auf ein Teilchen in Bewegung ausgeübt wird. Wir veranschaulichen diesen Sachverhalt mit einem Beispiel aus der Mechanik:



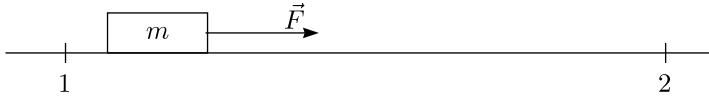
$$W = \int \vec{F} \, d\vec{s} = F \cdot (y_2 - y_1)$$

Falls $|F| = m \cdot g$ ist $W = mg(y_2 - y_1)$ die Arbeit, welche durch F geleistet wird. Die Arbeit durch die Erdanziehungskraft ist beispielsweise gegeben durch:

$$W_G = F \cdot (y_2 - y_1) = -mg(y_2 - y_1)$$

b.) Kinetische Energie:

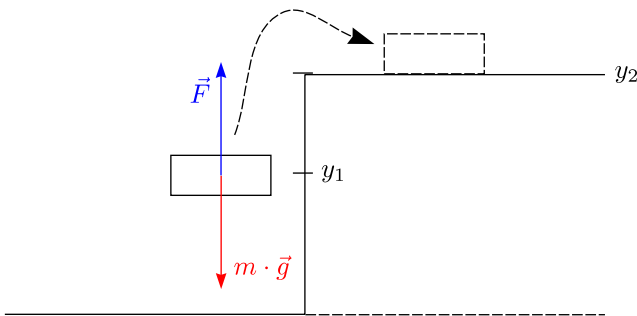
Führt eine Kraft \vec{F} zu einer Beschleunigung (oder auch Abbremsung), so ändert sich die kinetische Energie (Bewegungsenergie) des Teilchens, auf das die Kraft ausgeübt wird.



$$W = \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} d\vec{s} = \int_1^2 m \cdot \vec{v} d\vec{v} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \Delta E_{kin}$$

c.) Potentielle Energie:

Wirkt „arbeitende“ Kraft in einem Feld, so ändert sich die potentielle Energie des Teilchens.



$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = E_p(\vec{r}_2) - E_p(\vec{r}_1) = \Delta E_p$$

Beispiel: Homogenes Gravitationsfeld

$$\Delta E_p = mg(\Delta y)$$

$$E_p(y_1) = mgy_1$$

$$E_p(y_2) = mgy_2$$

Im geschlossenen System (keine externen (resultierenden) Kräfte) gilt:

$$E_{tot} = E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{tot} = \Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

Die ist die einfachste Form des Energieerhaltungssatzes.

Konservative Kraftfelder:

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{s} = - \int_2^1 \vec{F} d\vec{s}$$

Die geleistete Arbeit ist wegunabhängig, wenn das Integral über einen geschlossenen Weg (Ringintegral) verschwindet:

$$\oint \vec{F} d\vec{s} = 0$$

Ein Kraftfeld ist dann konservativ, wenn es eine Funktion V gibt, so daß sich die Kraft als Gradient dieser Funktion V schreiben läßt:

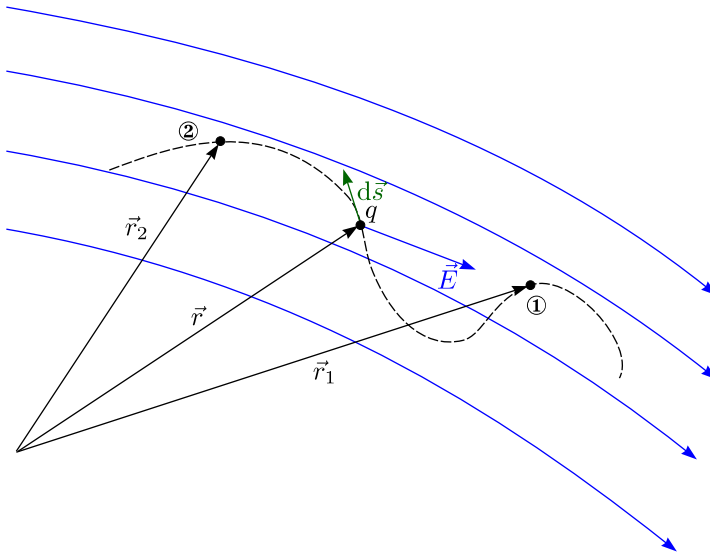
$$\vec{F} = -\nabla V$$

$$\nabla \equiv \text{Gradient} \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\oint \nabla V d\vec{s} = \oint \left(\frac{\partial}{\partial x} V dx + \frac{\partial}{\partial y} V dy + \frac{\partial}{\partial z} V dz \right) = [V]_{x_1}^{x_2} + [V]_{y_1}^{y_2} + [V]_{z_1}^{z_2} = 0$$

Elektromagnetische Felder:

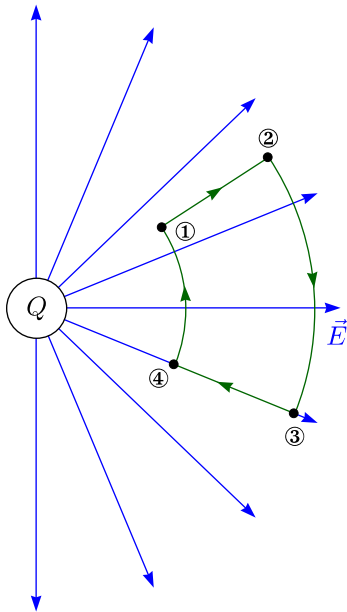


Das elektrostatische Feld übt eine Kraft auf eine Ladung q aus und leistet Arbeit, wenn q sich bewegt.

$$W = +q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = \Delta E_p$$

Spezialfall: Coulombfeld

$$W_{12} = +q \int_1^2 \vec{E} d\vec{s} = + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r d\vec{s} = + \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \boxed{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)} \quad (\text{da } \vec{e}_r \parallel \vec{E} \text{ und } \vec{e}_r \parallel d\vec{s})$$



Insbesondere gilt:

$$\oint q\vec{E} d\vec{s} = 0$$

i.) Weg von ② nach ③:

Entlang dieses Weges gilt $r = \text{const}$. $d\vec{s}$ steht somit senkrecht auf dem Vektor des elektrischen Feldes $\vec{E}(\vec{r})$. Damit ist also die geleistete Arbeit $W_{②③}$ gleich 0:

$$W_{②③} = q \int_2^3 \vec{E} d\vec{s} = \boxed{0}$$

ii.) Weg von ③ nach ④ (bzw. ④ nach ③):

Hier ist also $d\vec{s}$ parallel zum \vec{E} -Vektor. Die geleistete Arbeit ist hier im Gegensatz zum ersten Fall nicht 0, sondern beträgt:

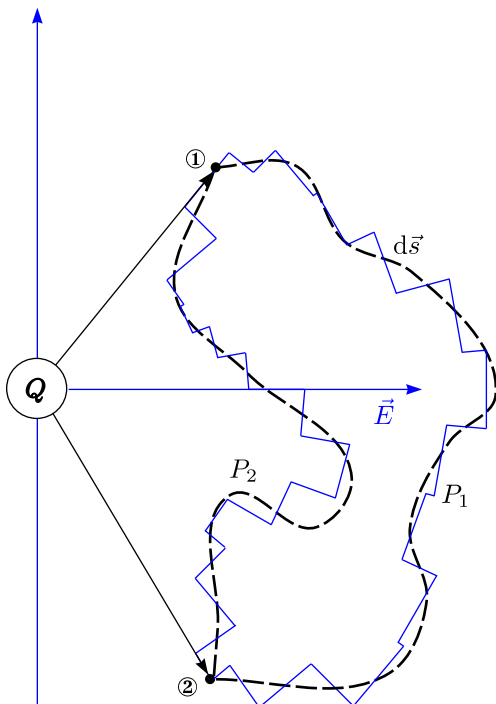
$$W_{③④} = +q \int_3^4 \vec{E} d\vec{s} = \boxed{\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)} = -W_{①②}$$

iii.) Weg von ④ nach ①:

$$W_{④①} = \boxed{0}$$

Auch allgemein gilt:

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$



P wird in Elemente senkrecht und parallel zum Vektor des elektrischen Feldes aufgeteilt.

- * Für $d\vec{s} \perp \vec{E}$ ist $\Delta W = 0$,
- * Ist $d\vec{s} \parallel \vec{E}$, so gilt $\Delta W \neq 0$:

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) + \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{r_N} - \frac{1}{r_1} \right) \right] = 0$$

* COULOMBpotential:

$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

* Potentielle Energie:

$$E_p(r) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Beispiel:

Wir betrachten das elektrische Potential auf der Oberfläche eines Goldatomkerns:



Für das Goldatom gilt $Z = 79$, es besitzt also 79 Protonen. Des weiteren beträgt der Radius R etwa $6,6 \cdot 10^{-15}$ m. Damit folgt also:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \cdot Q$$

$$Q = 79 \cdot e = 79 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$V_R = \frac{79 \cdot 1,6 \cdot 10^{19} \text{ C}}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N}\cdot\text{m}^2} \cdot 6,6 \cdot 10^{-15} \text{ m}} \approx 1,7 \cdot 10^7 \text{ V}$$

Einheiten:

$$1 \text{ C} \equiv 1 \text{ As}$$

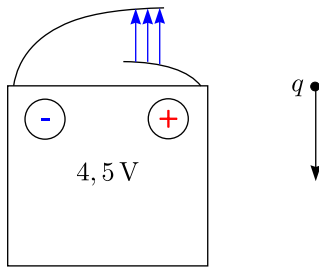
$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$$

$$1 \text{ W} = 1 \frac{\text{J}}{\text{s}} \equiv 1 \text{ VA}$$

$$1 \text{ V} = 1 \frac{\text{Nm}}{\text{C}}$$

Dies ist die Einheit für das Potential.

Anwendung: Beschleunigung im elektrischen Potential



$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

$$E_k = e \cdot \Delta V_p = e \cdot 4,5 \text{ V} = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2$$

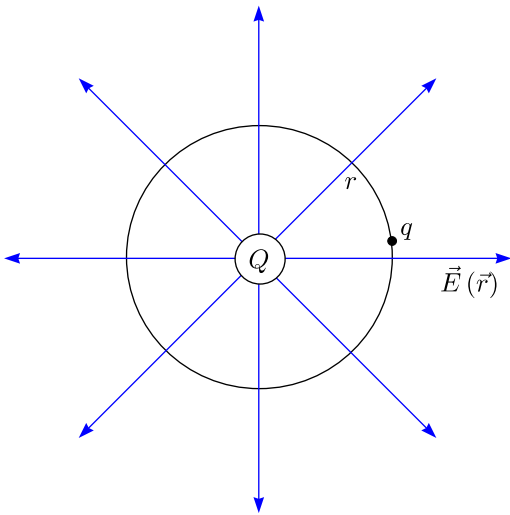
$$\Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot \frac{e \cdot \Delta V_p}{m_e}} = \sqrt{2 \cdot \frac{e \cdot U}{m_e}}$$

Eine weitere wichtige Größe ist die Spannung $U = \Delta V$. Insbesondere gilt:

1 eV ist die Differenz an kinetischer Energie einer Elementarladung nach Durchlaufen einer Spannung von 1 V.

Äquipotentialflächen:

Flächen mit $V = \text{const.} \perp \vec{E}$

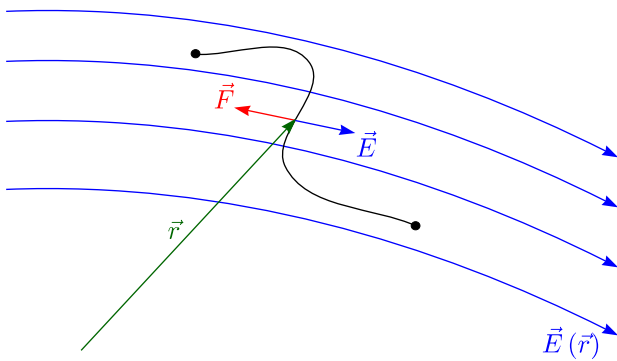


Wird eine Probeladung q längs einer Äquipotentialfläche bewegt, findet hier keine Energieänderung statt.

2.1.7 Divergenz des elektrischen Feldes

1. Erinnerung

Integrale Form:



$$V(\vec{r}_2) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \, d\vec{s} + V(\vec{r}_1)$$

Physikalisch relevant ist die Potentialdifferenz. Im geschlossenen System gilt:

$$\Delta E_k + \Delta E_p \stackrel{\wedge}{=} \Delta E_k + q \cdot \Delta V = 0$$

Da eine Integralgleichung schwerer zu lösen ist, notieren wir uns die differentielle Form:

Differentielle Form:

$$\Delta V = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \, d\vec{s} = - \int_{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}^{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}} (E_x \, dx + E_y \, dy + E_z \, dz)$$

Für $x_1 \mapsto x_2$ folgt nun:

$$\Delta V_x = -E_x \Delta x \quad (\Delta x = x_2 - x_1)$$

$$\Delta V_y = -E_y \Delta y$$

$$\Delta V_z = -E_z \Delta z$$

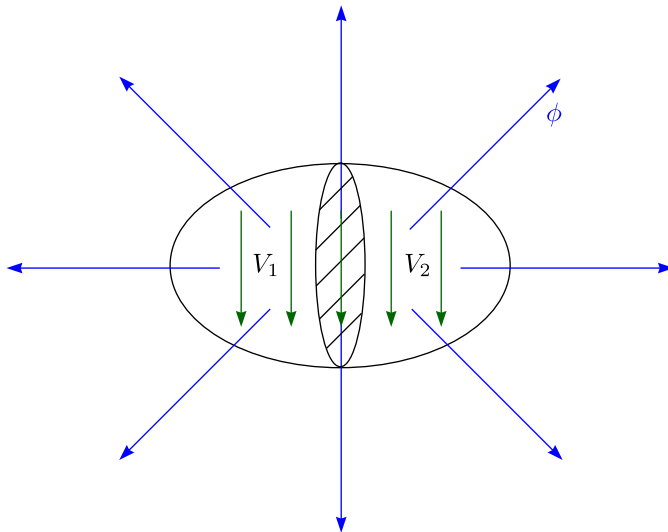
$$\left. \begin{array}{l} E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{array} \right\} \vec{E} = -\nabla V \quad \nabla \hat{=} \text{Gradient}$$

$$\text{Nabla} \vec{\nabla} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{array} \right)$$

Für Skalare ist dies der Gradient, für Vektoren die sogenannte Divergenz.

2. 1. MAXWELLSche Gleichung in integraler Form (GAUSSscher Satz)

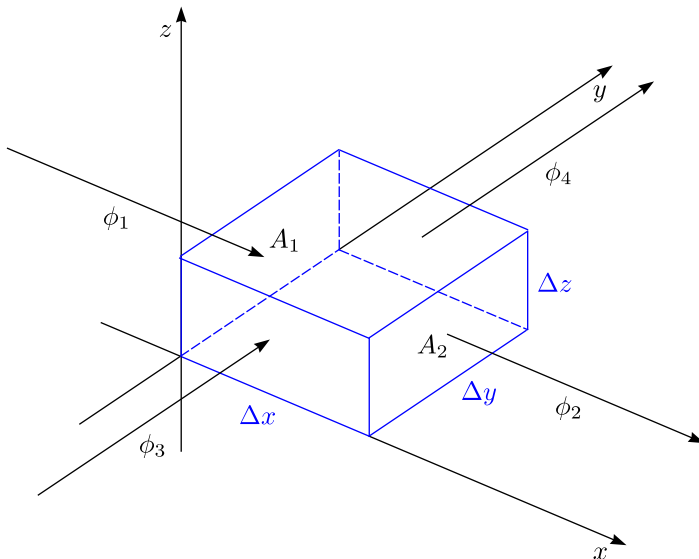
$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$



$$\oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \oint_{A_1} \vec{E} \, d\vec{A} + \oint_{A_2} \vec{E} \, d\vec{A}$$

Jetzt unterteilen wir das Volumen in infinitesimal kleine Würfelchen:

$$\sum_i \oint_{A_i} \vec{E} \, d\vec{A} = \int_V dV \left(\lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V_i} \int_{A_i} \vec{E} \, d\vec{A} \right)$$



Wir berechnen den Fluß durch die sechs Flächen des Würfels. Für den Fluß durch die Fläche A_1 gilt nach der allgemeinen Formel:

$$\phi_1 = - \int_{A_1} E_x \, dy \, dz \approx -E_x(x) \Delta y \Delta z$$

Die Fläche A_2 befindet sich in einer Entfernung von Δx von der Fläche A_1 . Die x -Komponente des elektrischen Feldes hat somit den Wert $E_x(x + \Delta x)$, womit sich für den Fluß ϕ_2 ergibt:

$$\phi_2 = + \int_{A_2} E_x \, dy \, dz = E_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z$$

Mit Hilfe der Taylor-Formel können wir für kleine Δx die Funktion $E(x + \Delta x)$ entwickeln:

$$E(x + \Delta x) = \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \Delta x \right)$$

Damit folgt nun endgültig für ϕ_2 :

$$E_x(x + \Delta x) \Delta y \Delta z \approx \left(E_x + \frac{\partial E_x}{\partial x} \cdot \Delta x \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Analog gilt für den Fluß durch die restlichen Flächen A_3 bis A_6 :

$$\phi_3 + \phi_4 = \frac{\partial E}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\phi_5 + \phi_6 = \frac{\partial E}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Somit gilt für den gesamten Fluß:

$$\begin{aligned} \oint_{A_1} \vec{E} \, d\vec{A} &= (\phi_1 + \phi_2) + (\phi_3 + \phi_4) + (\phi_5 + \phi_6) = \frac{\partial E}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial E}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z + \frac{\partial E}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z = \\ &= \Delta x \Delta y \Delta z \underbrace{\left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} \right)}_{\text{Divergenz von } \vec{E}} = \underbrace{\Delta x \Delta y \Delta z}_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Damit folgt nun:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{A_i} \vec{E} \, d\vec{A} = \nabla \vec{E}$$

$$\phi = \oint_A \vec{E} \, d\vec{A} = \int_V \vec{\nabla} \vec{E} \, dV = \frac{1}{\varepsilon_0} Q = \int_V \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \, dV$$

Durch Koeffizientenvergleich ergibt sich:

$$\boxed{\nabla E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

Dies ist die 1. MAXWELLSche Gleichung in differentieller Form.

3. Mit $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ folgt:

$$\vec{\nabla} E = -\vec{\nabla} (\vec{\nabla} V) = -\Delta V = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho \quad (\Delta \equiv \vec{\nabla}^2 \text{ (Laplace-Operator)})$$

$$\boxed{\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho}$$

Wir haben hier die sogenannte Poisson-Gleichung hergeleitet.

2.1.8 Beispiele von Feldern und Potential

a.) COULOMB-Potential

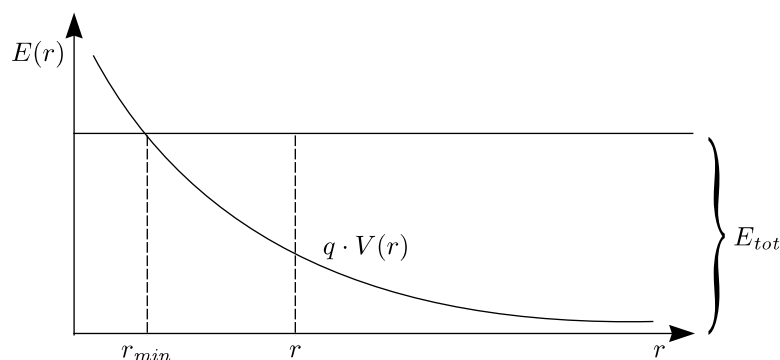
$$\boxed{V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

ii.) Abstoßend:

$$Q, q = \oplus, \oplus \text{ oder } \ominus, \ominus$$

Damit folgt:

$$E_{pot} = q \cdot V(r) = \frac{+Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



Wie nah kommt Teilchen an Q , das bei $r = \infty$ mit v_∞ losläuft? Dazu betrachten wir die Energiebilanz:

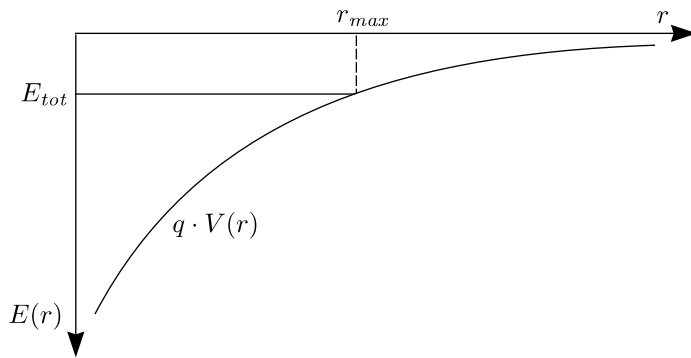
$$E_{tot} = E_p + E_{kin} = \text{const.} = 0 + \frac{1}{2} m_q v_\infty^2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{1}{2} m_q v(r)^2 = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r_{min}} + 0$$

Damit folgt r_{min} zu:

$$r_{min} = \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0 m_q v_\infty^2} = \boxed{\frac{qQ}{2\pi\varepsilon_0 m_q v_\infty^2}}$$

ii.) Anziehend:

$$q \cdot V(r) = -\frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 r}$$



$$E_{tot} = q \cdot V(r) + E_k$$

Für $E_{tot} < 0$ liegt ein gebundener Zustand vor. Das Teilchen kann maximal bis r_{max} kommen:

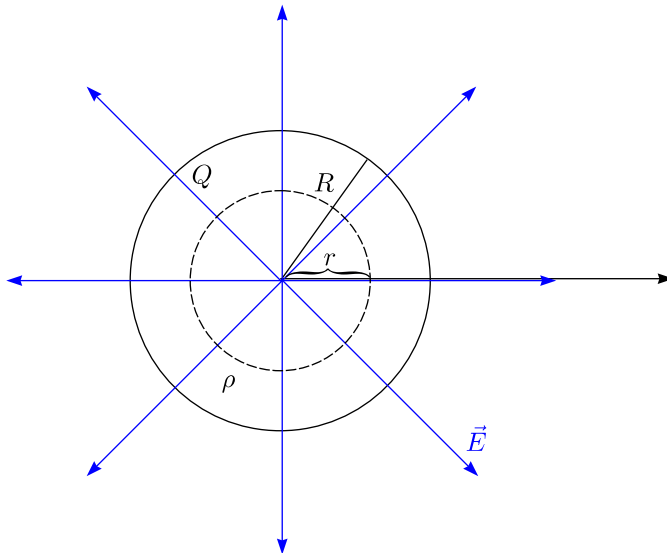
$$E_{tot} = \frac{1}{2} m_q v(r)^2 - \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{const}$$

$$-|E_{tot}| = 0 - \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 r_{max}}$$

Damit folgt dann r_{max} :

$$r_{max} = \frac{|q||Q|}{4\pi\epsilon_0 |E_{tot}|}$$

b.) Homogene Ladungsverteilung in einer Kugel (z.B. Atomkern)



* $r \leq R$: $\rho(r) = \rho_0 = \text{const.}$

* $r > R$: $\rho(r) = 0$

Damit läßt sich dann die Ladung angeben:

$$Q(r) = \begin{cases} \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r \geq R \end{cases}$$

Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke nehmen wir den GAUSSschen Satz:

$$\phi = \int_A \vec{E} \, d\vec{A} = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

Die elektrische Feldstärke ist betragsmäßig auf der Kugeloberfläche konstant, so daß wir sie vor das Integral ziehen können:

$$\int_A \vec{E}(r) \, d\vec{A} = E(r) \int_A dA = E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

Damit ergibt sich dann $E(r)$:

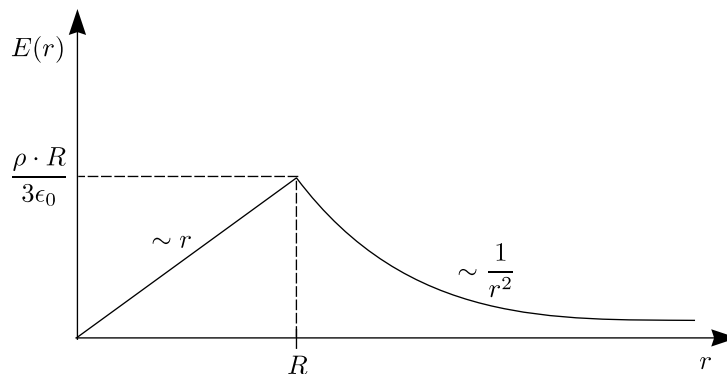
$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

* Für $r \leq R$:

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

* Für $r > R$:

$$E(r) = \frac{Q(R)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$



Potential:

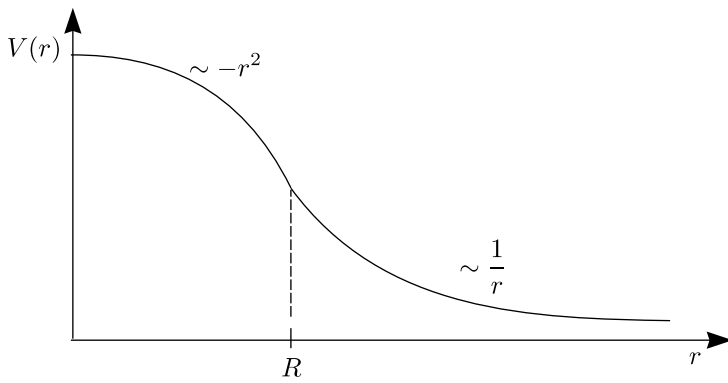
* Für $r = R \dots \infty$:

$$V(r) - V(\infty) = - \int_{\infty}^r \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} \, dr' = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} \frac{1}{r} \left(= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \right)$$

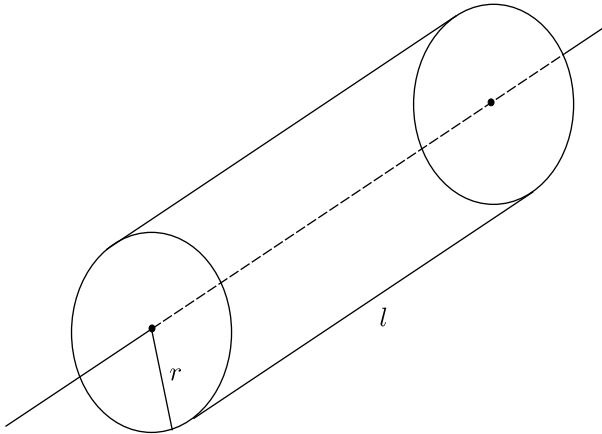
* Für $r = 0 \dots R$:

$$V(r) - V(R) = - \int_R^r \frac{\rho r'}{3\varepsilon_0} \, dr' = \frac{\rho R^2}{6\varepsilon_0} - \frac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2$$

Damit sieht die Funktion $V(r)$ folgendermaßen aus:



C.) Gleichmäßig geladener Draht



Für $l \gg r$ können die Randflächen des Drahtes vernachlässigt werden. Damit folgt für seine Fläche:

$$A = 2\pi r l$$

Die Längladungsdichte sei entlang des Drahtes konstant:

$$\lambda = \frac{Q}{l} \stackrel{!}{=} \text{const.}$$

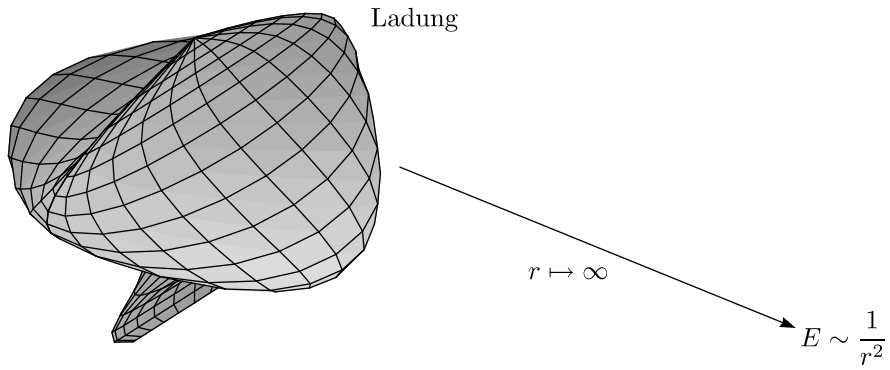
Auf der Oberfläche des Drahtes ist nun E wieder betragsmäßig konstant. Wir können so wie bei der Kugel verfahren und E vor das Integral ziehen:

$$\phi = \int_A \vec{E}(r) \cdot d\vec{A} = E \cdot \int_A dA = 2\pi r l \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \boxed{l \cdot \lambda \frac{1}{\epsilon_0}}$$

Damit resultiert also schließlich für E :

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \text{ für } l \gg r}$$

Das elektrische Feld eines sehr langen Drahtes verhält sich also für $r \mapsto \infty$ anders als das Feld einer auf einen kleineren Raumbereich konzentrierten Ladungsverteilung. Deren Feldstärke fällt für $r \mapsto \infty$ proportional zu $\frac{1}{r^2}$ ab; sie verhält sich also wie eine Punktladung:

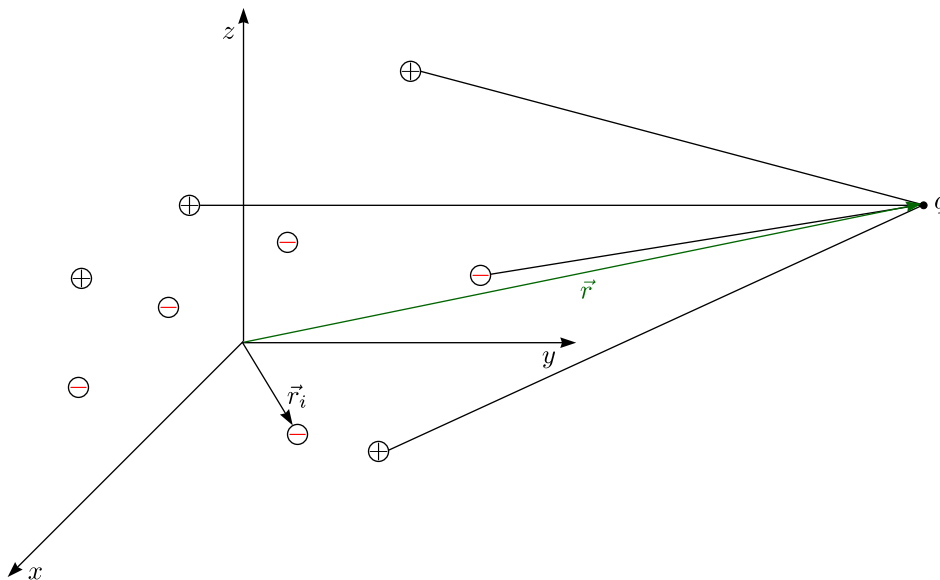


Für das Potential des Feldes eines sehr langen Drahtes folgt durch Integration:

$$V(r) = - \int_R^r E(\vec{r}') dr' = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

D.) Dipole, Multipole

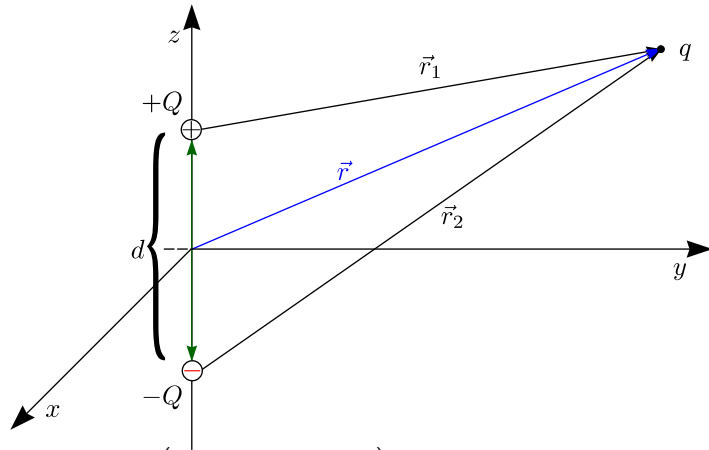
Betrachten wir eine Ansammlung ungleichnamiger Ladungen:



Es gilt wie immer das Superpositionsprinzip:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

D.) Spezialfall Dipol:



Die beiden Ladungen, aus denen der Dipol besteht, sind betragsmäßig gleich groß; sie haben nur entgegengesetzte Vorzeichen:

$$Q_1 \stackrel{!}{=} Q \stackrel{!}{=} -Q_2$$

Damit ergibt sich dann für das Potential:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r}_1|} - \frac{Q}{|\vec{r}_2|} \right)$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{|\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}|} - \frac{Q}{|\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}|} \right)$$

Wir nähern diese Beziehung durch eine Taylorreihenentwicklung:

$$\frac{1}{|\vec{r} \pm \frac{\vec{d}}{2}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 \pm \vec{r} \cdot \vec{d} + \frac{d^2}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} + \frac{d^2}{4r^2}}} \cdot \frac{1}{r} \approx \frac{1}{r} \left(1 \mp \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^2} \right) \quad (r \gg d)$$

Somit erhält man das Potential eines Dipols:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{d}}{r^3} \text{ mit dem Dipolmoment } \vec{p} \equiv Q\vec{d}$$

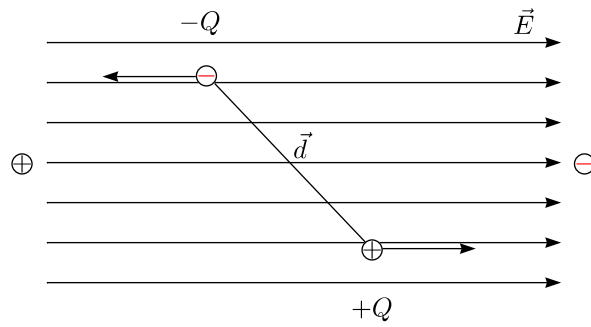
$$V(\vec{r}) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Dipolfeld:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla V(\vec{r}) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left((\vec{d}\vec{r}) \nabla \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \nabla (\vec{d}\vec{r}) \right) = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left(-3 \frac{(\vec{d}\vec{r})}{r^4} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{r^3} (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{r} \right) = \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-3 \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^4} \vec{e}_r + \frac{1}{r^3} (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{r} \right] = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-3 \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^4} \vec{e}_r + \frac{1}{r^3} \cdot \left(d_1 \frac{\partial}{\partial x} + d_2 \frac{\partial}{\partial y} + d_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-3 \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^4} \vec{e}_r + \frac{1}{r^3} \cdot \vec{d} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{Q\vec{d} \cdot \vec{r}}{r^4} \vec{e}_r - \frac{1}{r^3} \cdot Q\vec{d} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{p \cdot r \cdot \cos \theta}{r^4} \vec{e}_r - \frac{1}{r^3} \cdot \vec{p} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}) \end{aligned}$$

Kräfte auf einen Dipol:

i.) Im homogenen \vec{E} -Feld



Hinweis:

Hier handelt es sich natürlich um ein externes Feld und nicht um das des Dipols.

* Kraft auf $-Q$:

$$\vec{F}_1 = -\vec{E} \cdot Q$$

* Kraft auf $+Q$:

$$\vec{F}_2 = +\vec{E} \cdot Q$$

Damit folgt nun das Drehmoment:

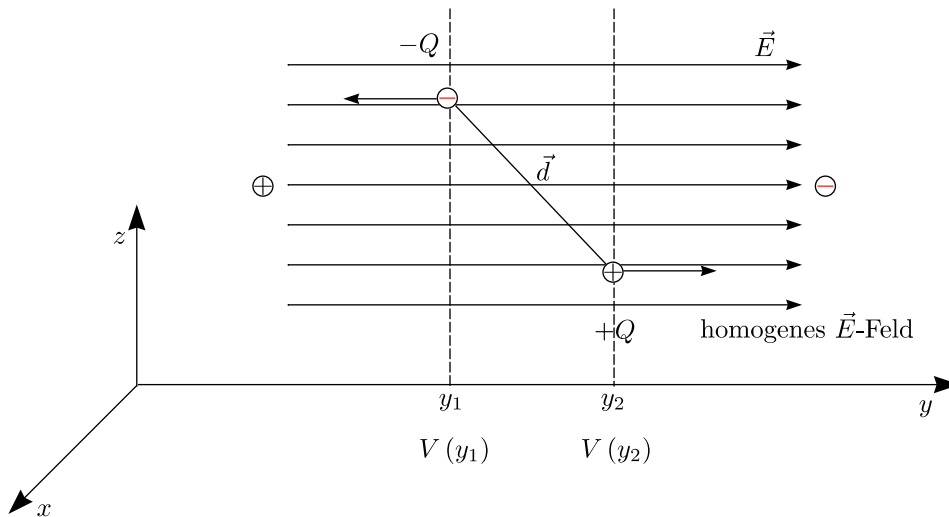
$$\vec{D} = Q \cdot (\vec{d} \times \vec{E})$$

Drehmoment:

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Der Dipol richtet sich so lange aus, bis $\vec{D} = \vec{\sigma}$ (wenn $\vec{d} \parallel \vec{E}$).

Energie eines Dipols:



$$E_{pot} = -Q \cdot V_1 + Q \cdot V_2 = Q \cdot \Delta V$$

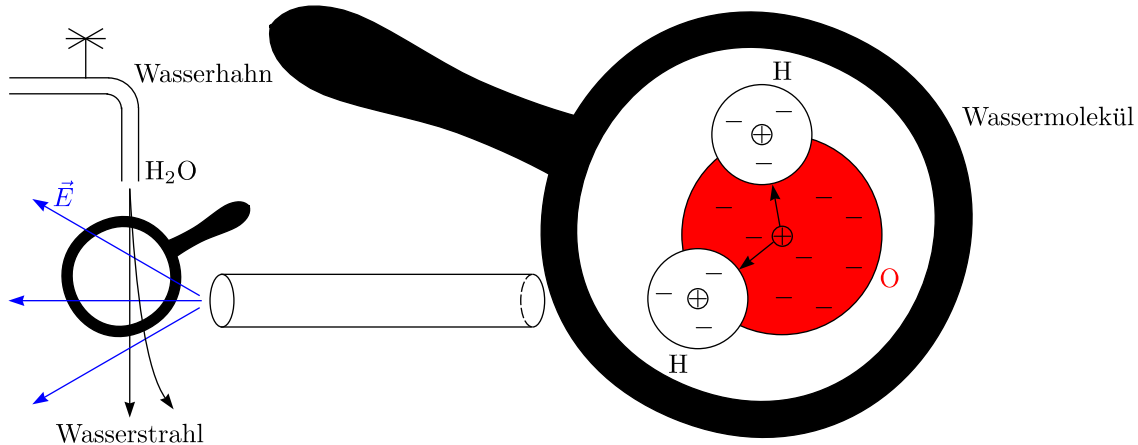
Dies wird für Δy maximal, d.h. $\vec{d} \parallel \vec{E}$.

ii.) Inhomogenes \vec{E} -Feld

Mit der Taylorentwicklung folgt:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= Q \cdot \left(\vec{E} \left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2} \right) - \vec{E} \left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2} \right) \right) \approx Q \cdot \left(\vec{E}(\vec{r}) + \left[\frac{\vec{d}}{2} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E} - \vec{E}(\vec{r}) - \left[-\frac{\vec{d}}{2} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{E} \right) = \\ &= Q \cdot (d\vec{\nabla}) \vec{E} = (\vec{p}\vec{\nabla}) \cdot \vec{E} \neq \vec{0} \end{aligned}$$

Demonstration:



Wassermoleküle haben ein Dipolmoment, da die Elektronenwolke asymmetrisch ist.

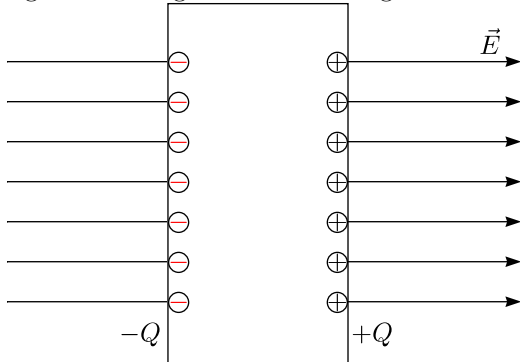
$$p_{\text{H}_2\text{O}} = 6 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$$

Daraufhin richten sich diese im elektrischen Feld des Stabes aus, womit der Wasserstrahl abgelenkt wird.

2.2 Leiter und Isolatoren im elektrischen Feld

Leiter im elektrischen Feld:

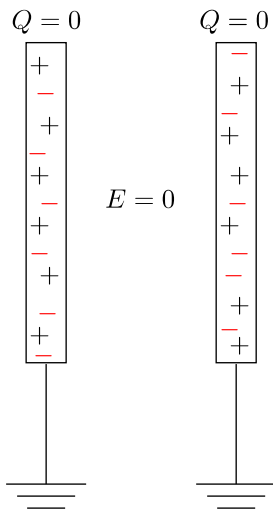
Bewegliche Ladungen werden so lange verschoben, bis ein neues Kräftegleichgewicht entstanden ist (Influenz).



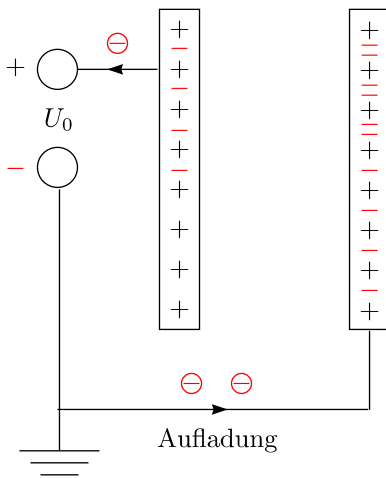
2.2.1 Sonderfall Kondensatoren

Ein Kondensator besteht aus zwei entgegengesetzt geladenen leitenden Flächen.

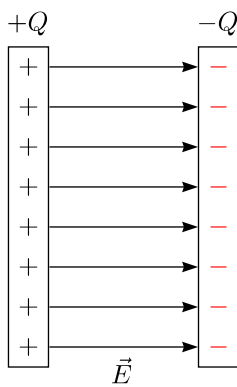
i.) Ungeladener Kondensator



ii.) Aufladungsvorgang

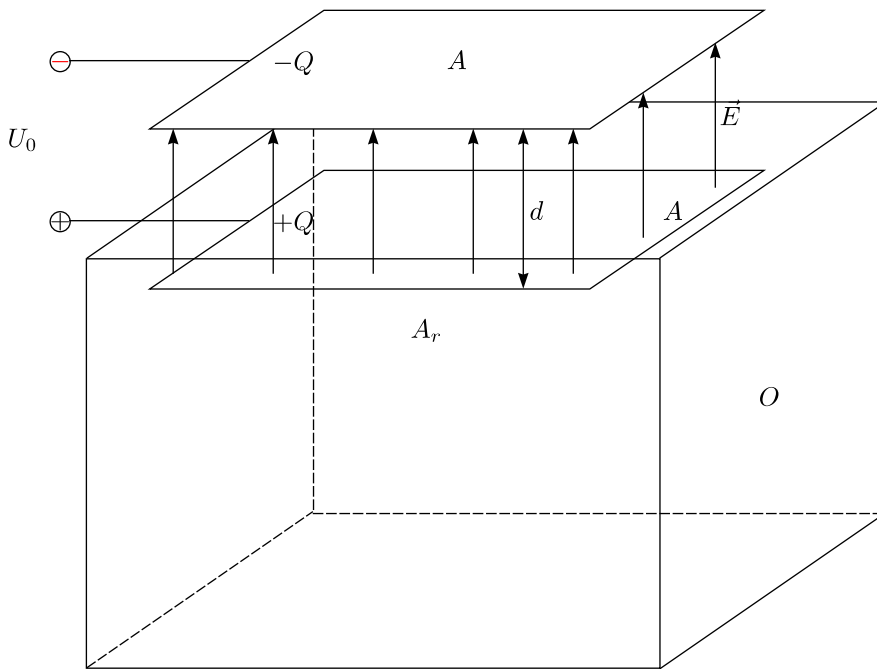


iii.) Geladener Kondensator



Beispiele:

a.) Plattenkondensator



Wir legen eine geschlossene Fläche O um Q herum. Diese geschlossene Fläche wird durch einen Quader realisiert:

$$O = A + A_r$$

A_r ist hierbei die Restfläche, also $O - A$. Für den Fluß folgt somit:

$$\phi = \oint_O \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_A \vec{E} \cdot d\vec{A} + \int_{A_r} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E \cdot A + \underbrace{0}_{\text{da } E=0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Damit ergibt sich für das elektrische Feld:

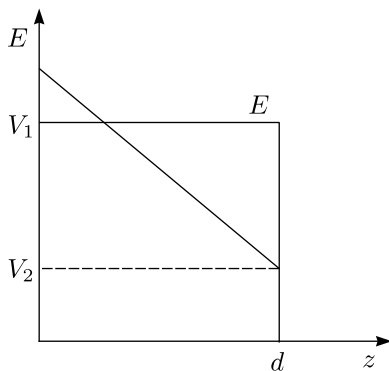
$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

Die Spannung (Potentialdifferenz) folgt nun durch Integration über das elektrische Feld entlang eines Weges von der einen zur anderen Platte.

$$U_0 \equiv \Delta V = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot d = \boxed{\frac{Q}{\epsilon_0 A} \cdot d}$$

Damit ergibt sich schließlich die Kapazität nach der Definition $Q = C \cdot U_0$:

$$\boxed{C = \epsilon_0 \frac{A}{d}}$$



Beispiel:

Es sei ein Plattenkondensator mit folgenden Abmessungen gegeben:

$$A = 100 \text{ cm}^2, d = 1 \text{ mm}$$

Dann folgt eine Kapazität von 88,5 pF.

Die Kapazität ist eine Eigenschaft des Leiters, dessen Geometrie und dem Isolator zwischen den Flächen.

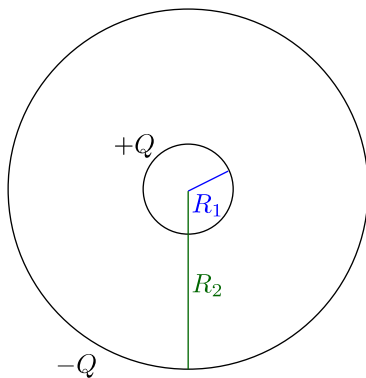
$$[C] = 1 \text{ Farad} \equiv 1 \frac{\text{C}}{\text{V}}$$

Folgende Kapazitäten sind üblich:

- * $10^{-6} \text{ F} = 1 \mu\text{F}$: Netzteile
- * $10^{-9} \text{ F} = 1 \text{ nF}$: Verstärker
- * $10^{12} \text{ F} = 1 \text{ pF}$: HF-Systeme

Kondensatoren sind nichts anderes als Ladungsspeicher.

b.) Kapazität einer Kugel mit Radius R (in Bezug auf unendlich ferne Oberfläche)



$$U \equiv \Delta V = V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{Q}{C}$$

Für $R_1 \mapsto \infty$ folgt:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Damit ergibt sich die Kapazität einer frei stehenden Kugel:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R$$

Beispiele:

- * $C_{\text{Stecknadelkopf}} = 0,11 \text{ pF}$
- * $C_{\text{Fußball}} = 16 \text{ pF}$
- * $C_{\text{Erde}} = 700 \mu\text{F} (!)$

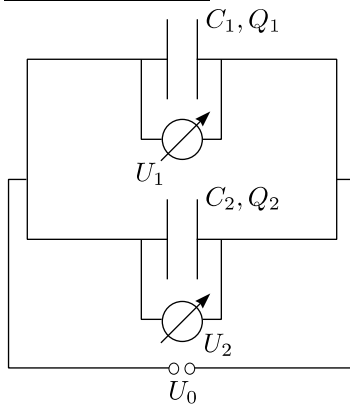
Beispiel:

$$U = 2 \cdot 10^6 \text{ V}; C = 4\pi\epsilon_0 \cdot 0,5 \text{ m} \approx 50 \text{ pF}$$

$$\Rightarrow Q = U \cdot C = 2 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot 50 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V}} = 10^{-4} \text{ C}$$

c.) Schaltungen von Kondensatoren

i.) Parallelschaltung:

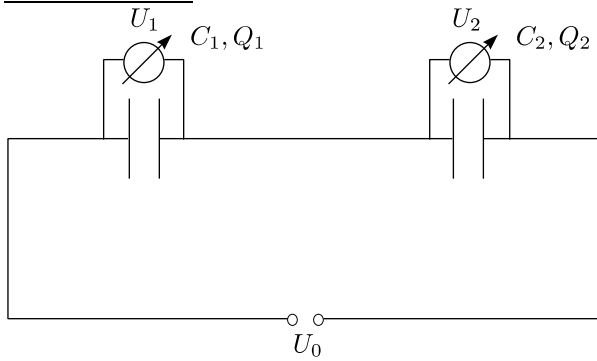


Mit $Q = Q_1 + Q_2$ ergibt sich:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U_0}$$

$$C = C_1 + C_2$$

ii.) Serienschaltung:



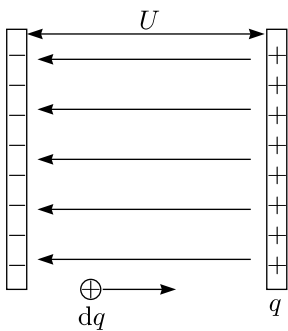
$$U_0 = U_1 + U_2$$

$$Q = Q_1 = Q_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_1 + U_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

2.2.2 Energie von Feldern



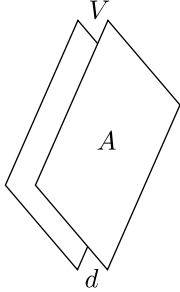
Bei der Verschiebung der positiven Ladung dq muß Arbeit aufgewendet werden:

$$dW = \Delta V \cdot dq \equiv U \cdot dq = \frac{q}{C} dq$$

$$W = \frac{1}{C} \int_0^Q q \, dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Energie, die im
Kondensator
gespeichert ist

Beispiel: Plattenkondensator



$$E_{pot} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 A d \frac{U^2}{d^2} = \frac{1}{2} \epsilon_0 V \cdot E^2$$

Damit folgt für die **Energiedichte**:

$$\frac{E_{pot}}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

Demonstration: Gespeicherte Energie

a.) $C = 100 \text{ mF}$

$$U = 16 \text{ V}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1} \text{ F} \cdot 16^2 \text{ V}^2 = 12 \text{ Ws}$$

b.) $C = 4 \mu\text{F}$

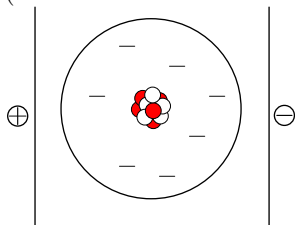
$$U = 4 \text{ kV}$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 16 \cdot 10^6 \text{ V}^2 = 32 \text{ Ws}$$

Die gespeicherten Energien in Kondensatoren sind sehr gering. Batterien beispielsweise besitzen Energien von 10^4 Ws und mehr.

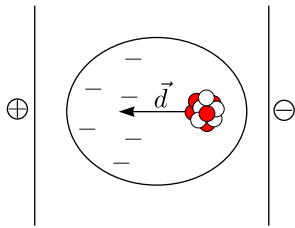
2.2.3 Polarisation der Materie

(Isolator im elektrischen Feld)



* Kern: $+Q, r \leq 10^{-15} \text{ m}$

* Hülle: $-Q, r \leq 10^{-10} \text{ m}$



Ein Atom im elektrischen Feld bildet Dipolmoment aus. ($d \approx \frac{1}{10} r_{Atom}$)

$$p = Q \cdot d = \alpha \cdot E$$

Der Proportionalitätsfaktor heißt Polarisierbarkeit und ist materialabhängig.

Beispiel:

Hier seien die Polarisierbarkeiten einiger Atome angegeben:

	H	He	Li	C	Ne	
α	10^{-24} cm^3	0,66	0,21	12	1,5	0,4

α ist kleiner bei Atomen mit abgeschlossenen Schalen wie bei den Edelgasen Helium (He) und Neon (Ne). Die Dipoldichte P erhält man durch Multiplikation der einzelnen Dipolmomente mit der Anzahldichte N der Atome:

$$P = N \cdot q \cdot d$$

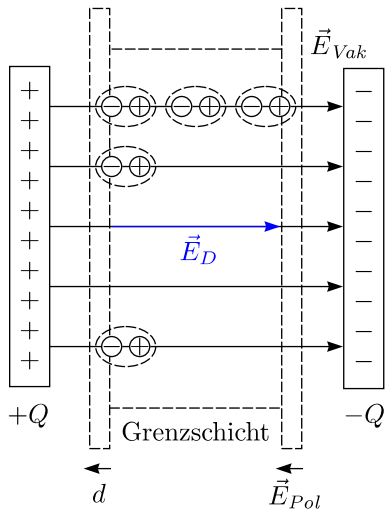
$$N \hat{=} \frac{\text{Atome}}{\text{cm}^3}$$

Außerdem folgt weiter, indem wir die neue Größe χ einführen:

$$\vec{P} = N \cdot \alpha \cdot \vec{E}_D \equiv \chi \cdot \vec{E}_D \cdot \epsilon_0$$

χ ist die dielektrische Suszeptibilität.

Illustration:



$\vec{E}_P \hat{=} \text{Polarisationsfeld}, \vec{E}_D \hat{=} \text{Feld im Dielektrikum}$

Für die Flächenladungsdichte ergibt sich:

$$\sigma_P = \frac{Q_{Pol}}{A} = \frac{N \cdot q \cdot V}{A} = \frac{N \cdot q \cdot A \cdot d}{A} = N \cdot q \cdot d = |\vec{P}| \equiv P$$

Für den Fluß im Vakuum folgt:

$$\phi = \oint \vec{E}_{Vak} d\vec{A} = A E_{Vak} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Damit resultiert das elektrische Feld im Vakuum:

$$E_{Vak} = \frac{Q}{A \cdot \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Analog ergibt sich für E_p :

$$E_P = \frac{Q_{Pol}}{A \cdot \epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$$

Das resultierende Feld im Dielektrikum kann nun berechnet werden durch:

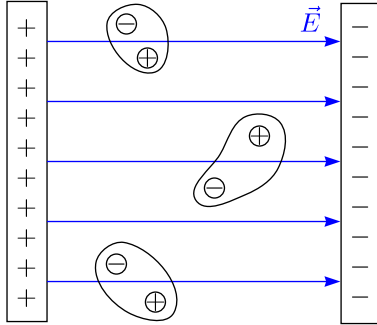
$$\vec{E}_D = \vec{E}_{Vak} - \vec{E}_P = \vec{E}_{Vak} - \frac{\vec{P}}{\epsilon_0} = \vec{E}_{Vak} - \chi \vec{E}_D \text{ für } \vec{P} \parallel \vec{E}$$

Damit folgt dann schließlich:

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_{Vak}}{1 + \chi} = \frac{1}{\epsilon} \vec{E}_{Vak}$$

$\epsilon \hat{=}$ relative Dielektrizitätskonstante

Einschub: Polarisation des Vakuums



Im Vakuum gibt es virtuelle Teilchen-Antiteilchenpaare, die sich im E -Feld ausrichten. Damit wird also das E -Feld kleiner! Die Konsequenz ist, daß das atomare Feld geringfügig vom COULOMBfeld abweicht.

2.2.4 Dielektrika im elektrischen Feld

Das Feld im Dielektrikum ist kleiner als im Vakuum:

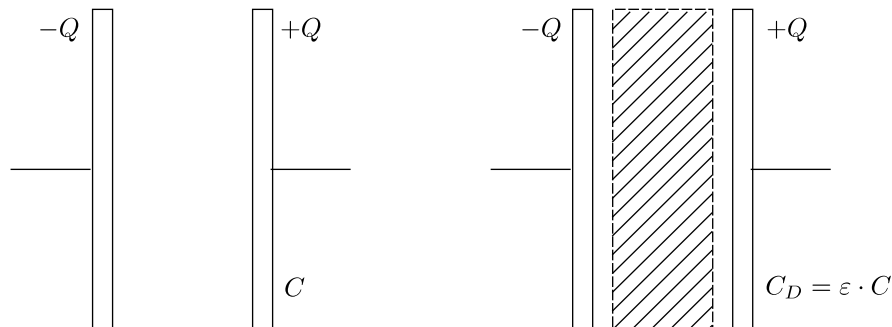
$$E_D = \frac{1}{\epsilon} E_{Vak}$$

$\epsilon \equiv \epsilon_r$

Hier sind einige Werte für die Dielektrizitätszahl aufgelistet:

ϵ_r	Stoff
1	Vakuum
1,00054	Luft
3,5	Papier
4	Plexiglas
78 – 81	Wasser

Die Kapazität ist im Dielektrikum größer:

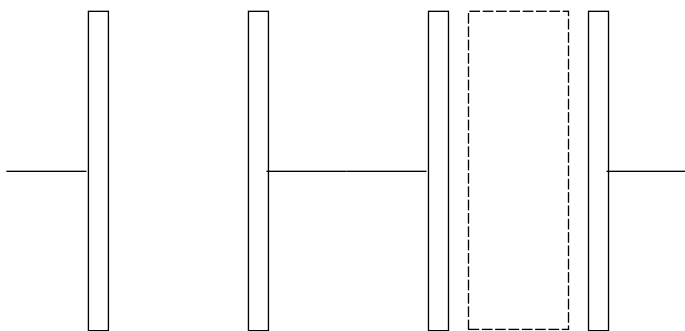


Mit $U = E \cdot d$ folgt für die Spannung im Dielektrikum:

$$U_D = E_D \cdot d = \frac{E_{Vak} \cdot d}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} U$$

Damit gilt also folgende Beziehung zwischen der Kapazität eines Plattenkondensators mit Dielektrikum und ohne:

$$C_D = \epsilon \cdot C$$



Schaltet man einen Kondensator mit und einen ohne Dielektrikum in Reihe, so gilt:

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

$$\frac{1}{C'} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$C' \leq C$$

Kapitel 3

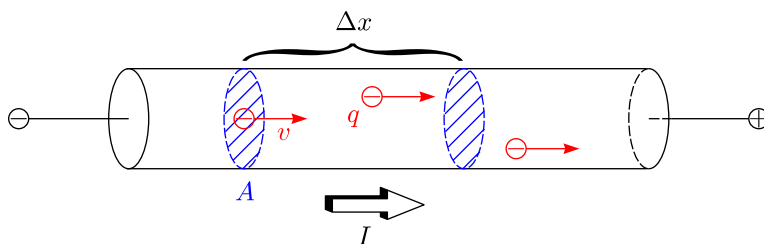
Elektrische Ströme und ihre Felder

Strom \equiv fließende Ladung

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = 1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Ströme durch Leiter:



Wir betrachten einen Leiter mit n Ladungen pro Volumeneinheit. Dann folgt mit $\Delta x = v \cdot \Delta t$:

$$\Delta Q = n \cdot q \cdot v \cdot \Delta t \cdot A$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot v$$

Damit ergibt sich schließlich für die Stromdichte:

$$j = \frac{I}{A} = n \cdot q \cdot v = \rho \cdot v$$

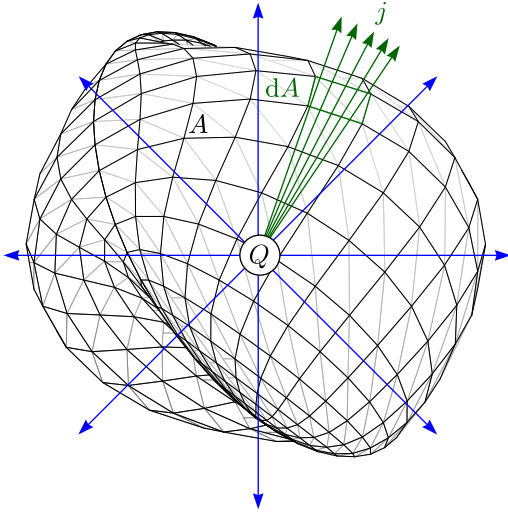
Konvention:

Der Strom fließt in Richtung des elektrischen Feldes, d.h. von „+“ nach „-“.

Beispiel für Ströme in Technik und Natur:

- * Hochintegrierte Schaltkreise: 10^{-12} (1 pA) bis 10^{-6} A
- * Elektronenstrahl im Fernseher: 10^{-3} A
- * Lebensgefährlich: 10^{-3} bis 10^{-1} A
- * Strom in Taschenlampe: 0,3 A
- * Auto anlassen: 200 A
- * Blitz: 10^4 A
- * Maximaler Strom im Supraleiter: 10^7 A

3.1 Die Kontinuitätsgleichung



$$I = \oint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = -\frac{d}{dt} Q(t)$$

Dann ergibt sich mittels des GAUSSschen Satzes:

$$\int_V \text{div} \vec{j} \, dV = -\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV$$

Und schließlich folgt hieraus die sogenannte Kontinuitätsgleichung:

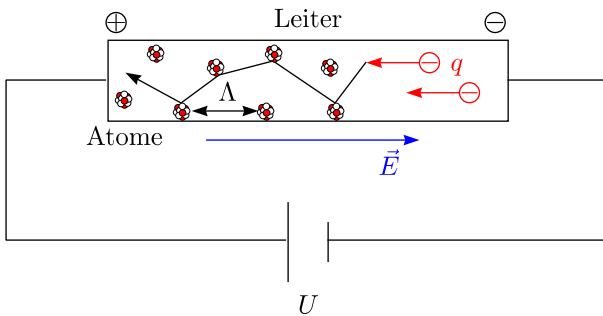
$$\boxed{\text{div} \vec{j} = -\dot{\rho}}$$

Diese besagt: „Es kann keine Ladung erzeugt oder vernichtet werden, ohne daß ein Strom fließt.“

Es handelt sich also um den Satz von der Erhaltung der Ladung in mathematischer Form. Dies ist gleichwertig mit Energieerhaltung, Impulserhaltung und Drehimpulserhaltung.

3.2 Ströme und Schaltkreise

3.2.1 Das Ohmsche Gesetz



Die Kraft auf q berechnet sich nach:

$$F = q \cdot E = m \cdot a$$

Die Bewegung der Elektronen in Richtung Anode ist wegen Stößen an Atomen im Mittel gleichförmig (Drift).

Λ ist die mittlere freie Weglänge der Elektronen im Leiter und von der Größenordnung $20 \cdot R$ ($R \hat{=} \text{Atomradius}$).

τ ist die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen. Damit folgt:

$$\tau = \frac{\Lambda}{\langle v \rangle}$$

$\langle v \rangle$ ist hierbei die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen im Leiter zwischen zwei Stößen.

$$a = \frac{\langle v \rangle}{\tau} = \frac{q \cdot E}{m}$$

Hieraus ergibt sich dann die Driftgeschwindigkeit v_D und somit die Stromdichte:

$$v_D = \frac{q \cdot E}{m} \cdot \tau$$

$$j = n \cdot q \cdot \langle v \rangle = \frac{n \cdot q^2 \cdot \tau}{m} \cdot E \equiv \sigma_e \cdot E$$

σ_e ist die elektrische Leitfähigkeit. Makroskopisch gesehen folgt mit $E = \frac{U}{L}$:

$$I = \frac{\sigma_e \cdot A}{L} \cdot U \equiv \sigma \cdot U \equiv \frac{1}{R} \cdot U$$

Folgende Größen sind wichtig:

* Leitwert:

$$\sigma = \frac{1}{R}$$

* Widerstand:

$$R = \frac{U}{I}$$

$$[R] = 1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}$$

Dieser hängt von der Form des Leiters ab.

* Spezifischer Widerstand:

$$\rho = R \cdot \frac{A}{L}$$

$$[\rho] = 1 \frac{\Omega \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = 1 \Omega \text{m}$$

Der spezifische Widerstand hängt jedoch nur vom Material ab.

Beispiel:

* Ag: $\rho = 0,016 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$

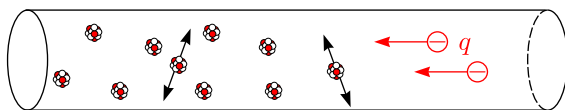
* Cu: $\rho = 0,017 \cdot 10^{-6} \Omega \text{m}$

* Fe: $0,1 \Omega \text{m}$

* Graphit: $14 \Omega \text{m}$

* Porzellan: $3 \cdot 10^{16} \Omega \text{m}$

3.2.2 Temperaturabhängigkeit von Widerständen

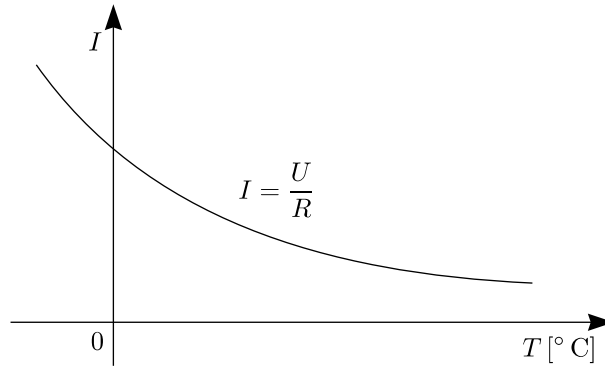
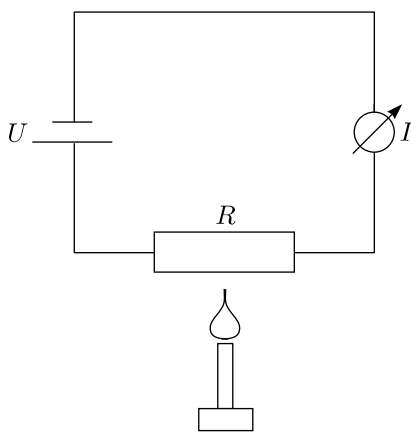


Die Temperatur manifestiert sich in der thermischen Bewegung der Atome. Wir erwarten, daß Λ abnimmt, wenn T zunimmt. Für Metalle gilt folgende Temperaturabhängigkeit:

$$\rho \simeq \rho_0(1 + \alpha T), T \text{ in } ^\circ \text{C}$$

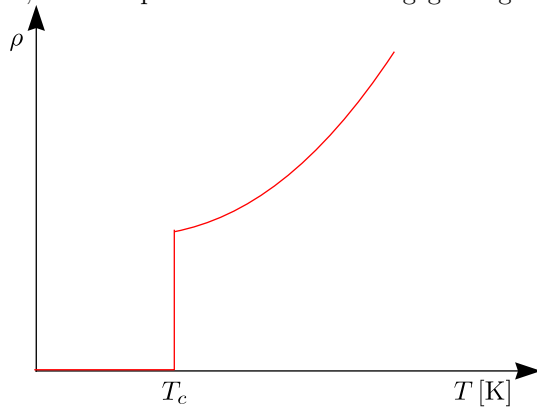
$\alpha \hat{=}$ Temperaturkoeffizient

Typisch ist ein α von etwa $4 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{K}}$. Wir erwarten bei konstanter Spannung U :



Sonderfall: Supraleitung

Im Jahre 1911 wurde von K. ONNES in Leiden (1913 Nobelpreis) beobachtet, daß bei Abkühlung von Quecksilber auf 4,2 K der spezifische Widerstand gegen 0 geht.



Dieser Effekt ist auf die Bewegung von Elektronenpaaren (Cooper-Paare) durch polarisiertes Kristallgitter zurückzuführen.

Beispiel:

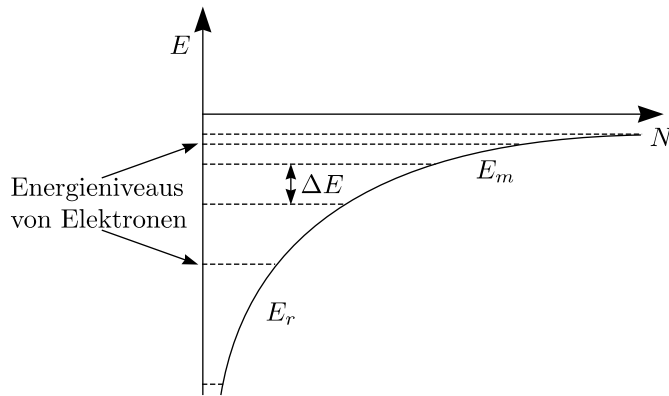
Bei verschiedenen Metallen wurden hierbei folgende Temperaturen T_C aufgenommen:

Element/Verbindung	T_C [K]	
Nb	9,4	
Pb	7,2	
Tn	4,5	
Hg	4,2	1911: ONNES
Ir	0,14	
CuS	1,6	
LaBaCuO	85	1987: MÜLLER, BEDUORZ (IBM)
TiCaBaCuO (Kuprat)	125	

Sonderfall Halbleiter:

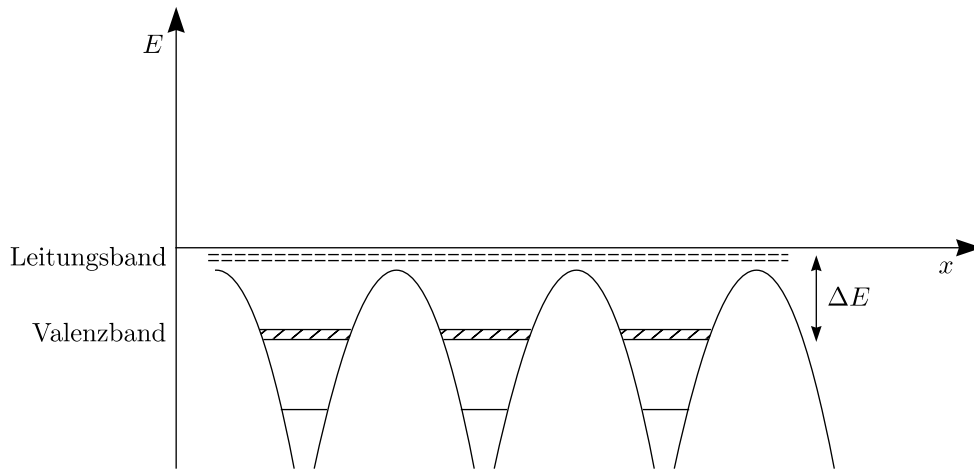
- * Betrachtung: Bei Atomen in großem Abstand
Um Elektron freizuschlagen, damit es wandern kann, ist eine Ionisation nötig.

$$\Delta E = O(eV)$$



* Betrachtung: Viele Atome im Verband

Wegen gegenseitiger Störungen der Atome gibt es keine diskreten Energieniveaus, sondern Bänder.



a.) Isolatoren:

Es befindet sich kein Elektron im Leitungsband; außerdem hat dieses einen großen Abstand zum Valenzband. Auch bei großen Spannungen fließt somit kein Strom.

b.) Leiter:

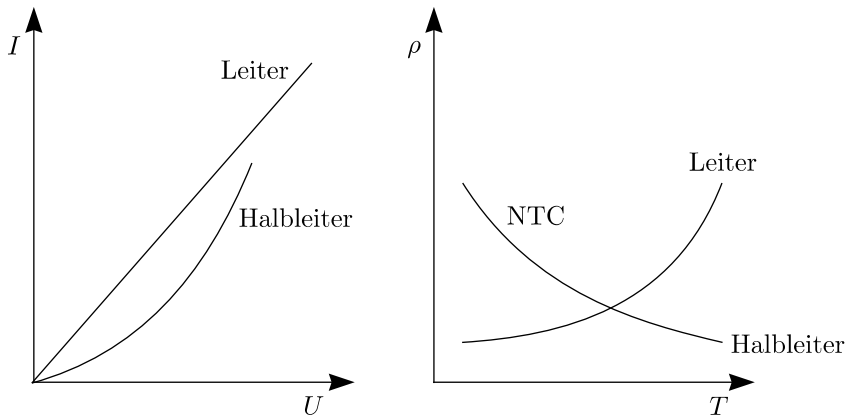
Im Leitungsband befinden sich permanent Elektronen. Starke Ströme sind somit schon bei kleinen Spannungen möglich.

c.) Halbleiter:

Im Halbleiter ist nur eine geringe Energie nötig, um Elektronen ins Leitungsband zu heben.

$$n(T) = n_0 \cdot \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right)$$

Konsequenz:



3.2.3 Stromleistung und Energie

Leistung:

Die Leistung P ist definiert als „Arbeit/Zeit“. Dies gilt allgemein sowohl für die Mechanik als auch für die Elektrodynamik.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

Mit $W = q \cdot U$ folgt:

$$P = \frac{dW}{dt} = U \cdot \frac{dq}{dt} = U \cdot I$$

$$[P] = 1 \text{ VA} \equiv 1 \text{ W (Watt)}$$

Energie:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P dt = U \cdot I \cdot \Delta t$$

$$[W] = 1 \text{ J} = 1 \text{ Ws}$$

$$P = U \cdot I = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

$$W = I^2 R \Delta t = \frac{U^2}{R} \Delta t$$

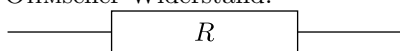
3.2.4 Schaltungen, Netzwerke

A.) Symbole

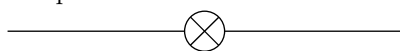
* Leiter ($R = 0$):



* OHMscher Widerstand:



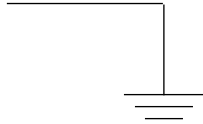
* Lampe:



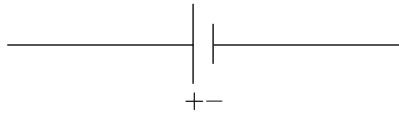
* Schalter:



* Erde ($U = 0$):



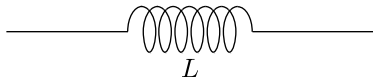
* Spannungsquelle:



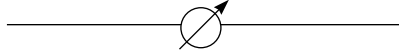
* Kondensator:



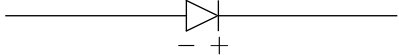
* Spule:



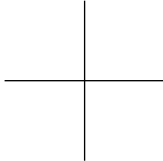
* Meßinstrument:



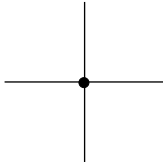
* Diode:



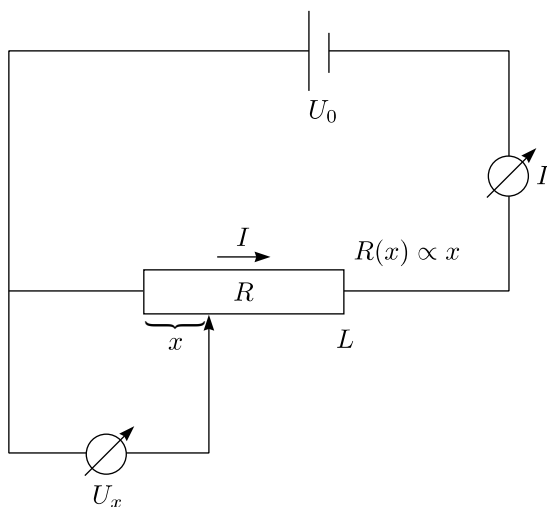
* Kreuzen ohne Kontakt



* Elektrisch verbunden:



B.) Potentiometer



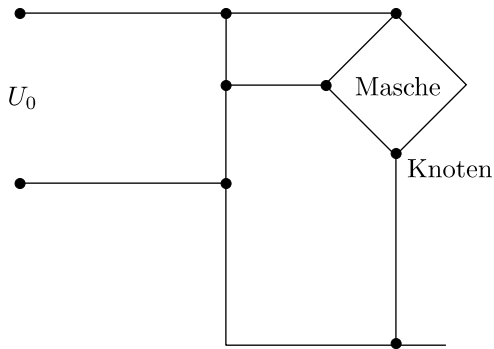
Das Potentiometer erlaubt, beliebige Spannungen bis maximal U_0 abzugreifen.

$$R_x = \frac{x}{L} \cdot R$$

$$U_x = \frac{x}{L} \cdot U_0$$

C.) Die KIRCHHOFFSchen Gesetze

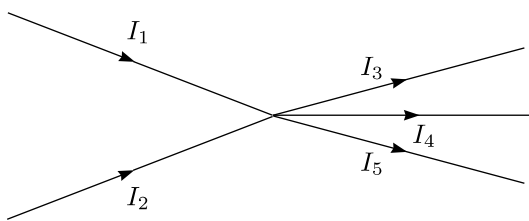
Schaltet man mehrere Leiter zusammen, erhält man ein Netzwerk.



* Knotenregel:

An jedem Knoten ist die Summe der Ströme gleich 0. (Folgt aus Kontinuitätsgleichung)

$$\sum_i I_i = 0$$



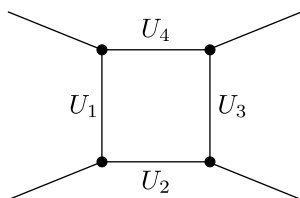
negativ

positiv

* Maschenregel:

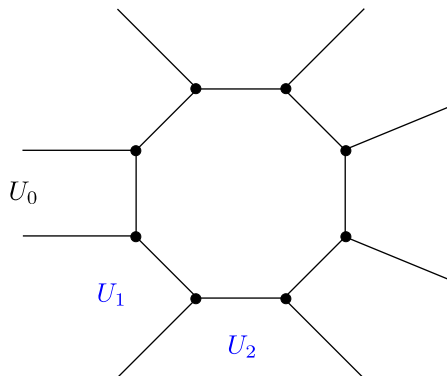
An einer Masche, die keine Spannungsquelle enthält, ist die Summe der Spannungen gleich 0.

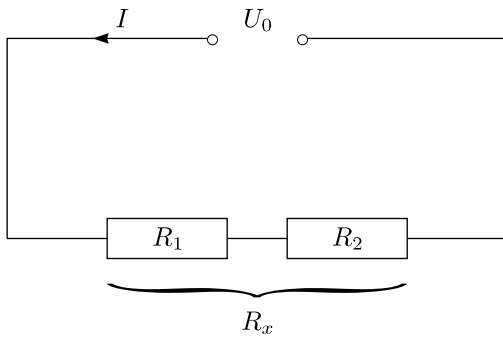
$$\sum_i U_i = 0$$



Mit eingebauter Spannungsquelle der Spannung U_0 folgt:

$$\sum_i U_i = U_0$$



Anwendungen:i.) Serienschaltung von Widerständen:

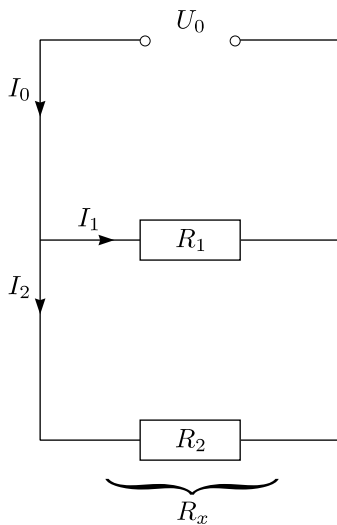
$$U_0 = U_1 + U_2 = I_0 R_1 + I_0 R_2 = I_0 R_x$$

Somit kann der Widerstand R_x berechnet werden:

$$R_x = R_1 + R_2$$

Generell gilt:

$$R_x = \sum_k R_k$$

ii.) Parallelschaltung von Widerständen:

$$I_0 = I_1 + I_2$$

$$U_0 = I_1 R_1 = I_2 R_2 = (I_1 + I_2) \cdot R_x$$

Hiermit folgt:

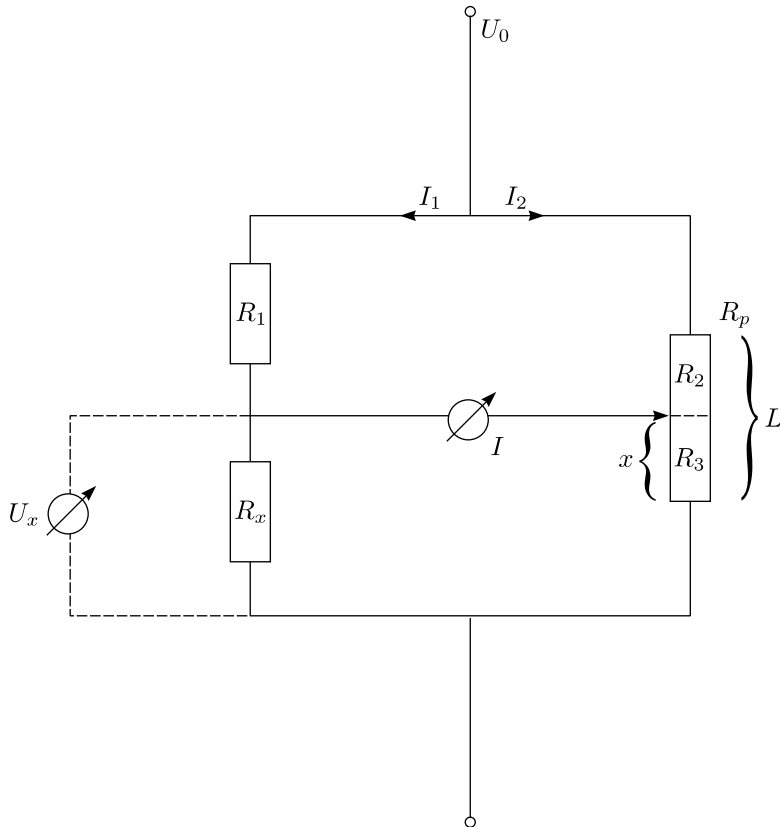
$$U_0 = \left(\frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} \right) \cdot R_x$$

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Hier gilt generell:

$$\frac{1}{R_x} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

iii.) Widerstandsmessung mit WHEATSTONEScher Brückenschaltung:



Die Widerstände R_2 und R_3 werden so lange abgeglichen, bis $I = 0$ ist. Dann gilt:

$$U_x = I_1 R_x = I_2 R_3$$

$$U_0 = I_1 (R_1 + R_x) = I_2 (R_2 + R_3)$$

Daraus ergibt sich dann folgendes Verhältnis:

$$\frac{R_x}{R_3} = \frac{R_1 + R_x}{R_2 + R_3}$$

Damit ergibt sich für R_x :

$$R_x = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

Mit $R_2 + R_3 = R_p$ ergibt sich für das Potentiometer:

$$R_3 = \frac{x}{L} R_p$$

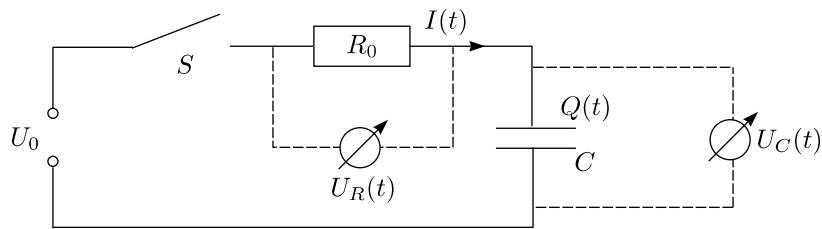
$$R_2 = \frac{L - x}{L} R_p$$

Somit gilt:

$$\boxed{R_x = R_1 \cdot \frac{x}{L - x}}$$

iv.) Auf- und Entladung eines Kondensators:

1.) Aufladung:



$$U_0 = U_R(t) + U_C(t) = I(t)R_0 + U_C(t)$$

Damit ergibt sich für $I(t)$:

$$I(t) = \frac{U_0}{R_0} - \frac{Q(t)}{R_0 C}$$

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{R_0 C} I(t)$$

Wir verwenden folgenden Ansatz:

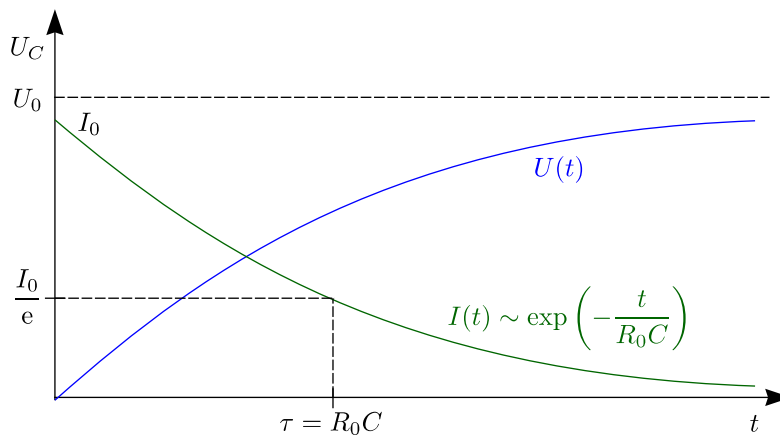
$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Dieser Ansatz wird in die Differentialgleichung eingesetzt, womit dann folgt:

$$-\frac{1}{R} I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{1}{R_0 C} I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Und somit ergibt sich für die sogenannte Zeitkonstante τ :

$$\tau = R_0 \cdot C$$



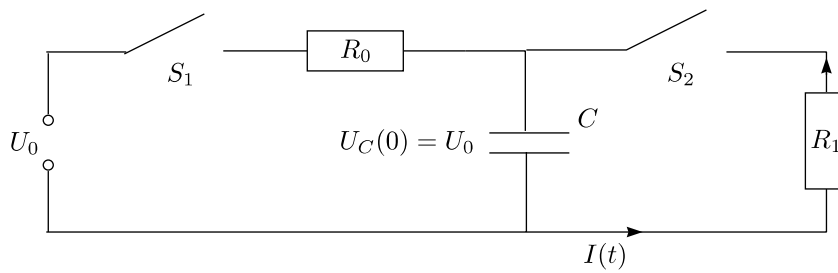
Die Lösung lautet:

$$I(t) = I_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_0 C}\right)$$

$$U_C(t) = U_0 - I_0 R_0 \exp\left(-\frac{t}{R_0 C}\right) = U_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_0 C}\right)\right)$$

2.) Entladung:

Nach Aufladen von C wird S_1 geöffnet und S_2 geschlossen.



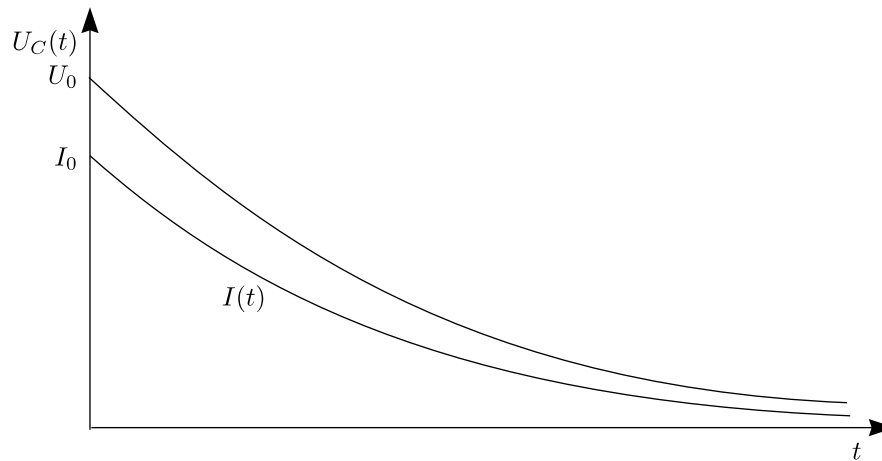
$$U_C(t) = I(t) \cdot R_1 = -\frac{dQ}{dt} R_1$$

$$U_C(t) \cdot C = -\frac{dU_C}{dt} \cdot R_1$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist:

$$U_C(t) = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R_1} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$$



$$Q(t) = Q_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right) = U_0 \cdot C \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_1 C}\right)$$

Zeitkonstanten: Typische Werte

* Für Verstärker:

$$\left. \begin{array}{l} C = 1 \text{ nF} \\ R = 1 \text{ M}\Omega \end{array} \right\} \tau = R \cdot C = 1 \text{ nF} \cdot 1 \text{ M}\Omega = 1 \cdot 10^{-9} \text{ F} \cdot 10^6 \Omega = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 1 \text{ ms}$$

* Für Hochfrequenzelektronik

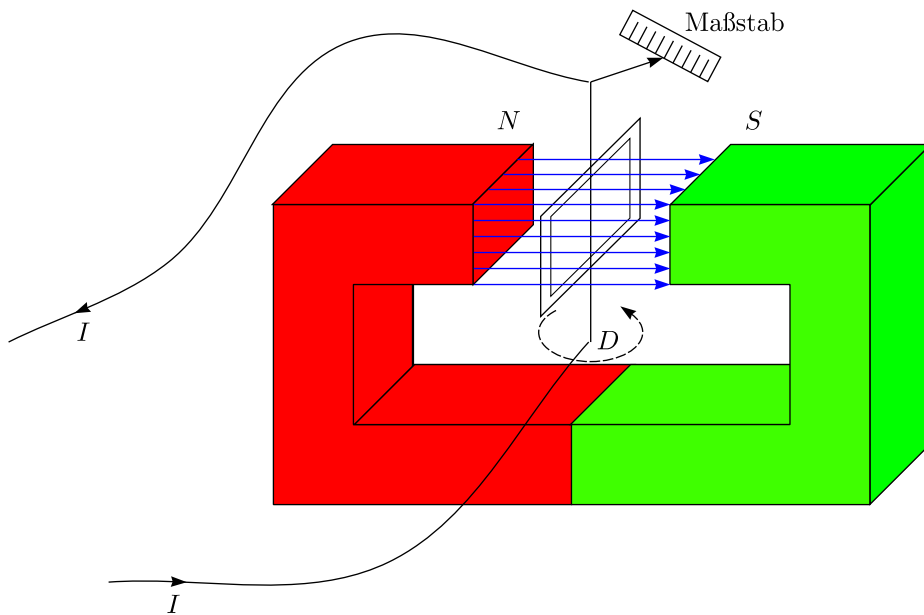
$$\left. \begin{array}{l} C = 10 \mu\text{F} \\ R = 10 \text{ k}\Omega \end{array} \right\} \tau = 100 \text{ ns}$$

3.2.5 Meßinstrumente

A.) Strommessung:

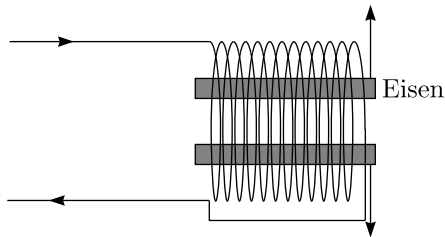
* Galvanometer

Dabei handelt es sich um das gebräuchlichste Gerät. Das Galvanometer nutzt Kräfte zwischen Magnetfeld und Strom aus.



Das Drehmoment auf die Spule ist proportional zu $B \cdot I$. Die Empfindlichkeit ohne Stromverstärker liegt im Bereich von mA.

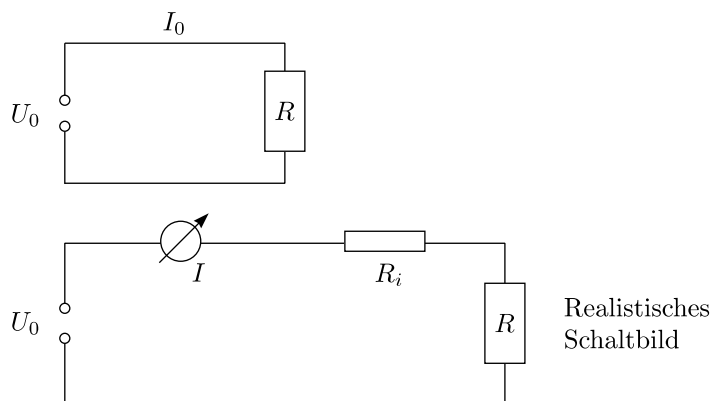
- * Hitzdraht-Ampèremeter ($I > 0,1 \text{ A}$)
Nutzt thermische Verlängerung eines stromdurchflossenen Leiters
- * Weicheisen-Instrument



Abstoßung zweier magnetisierter Eisenkörper in Spule

- * Elektrolytische Abscheidung

Anwendung: Messung des Stromes I in einem Schaltkreis

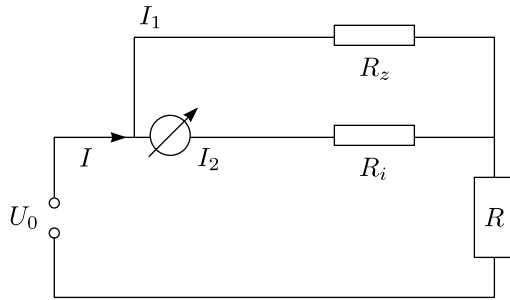


- * Meßfehler:

$$I = \frac{U_0}{R + R_i} = I_0 \cdot \frac{R}{R + R_i}$$

$$\Rightarrow R_i \ll R$$

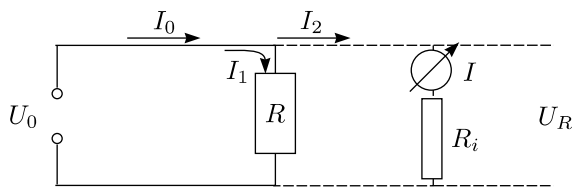
* Bereichserweiterung:



Abzweigung von I_1 , Korrektur der Skala: Aus $I_1 R_z = I_2 R_i$ folgt dann:

$$I = I_2 \left(1 + \frac{R_i}{R_z} \right)$$

B.) Spannungsmessung über R mit Voltmeter:



$$I_0 = I_1 + I_2$$

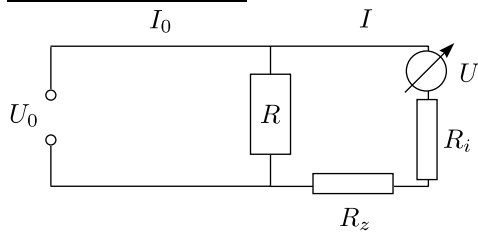
$$U_R = I_1 \cdot R = I_2 \cdot R_i$$

Damit ergibt sich folgender **Meßfehler**:

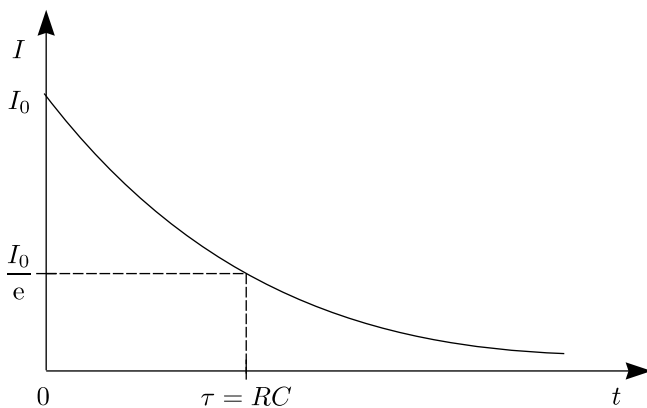
$$U_R = U_0 \frac{R_i}{R + R_i}$$

Es gilt also $R_i \gg R$.

* Bereichserweiterung:



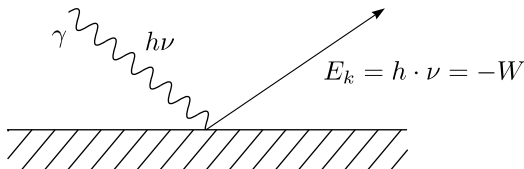
C.) Messung sehr großer Widerstände: Bestimmung von $\tau = R \cdot C$ bei Kondensatorentladung



3.3 Stromquellen

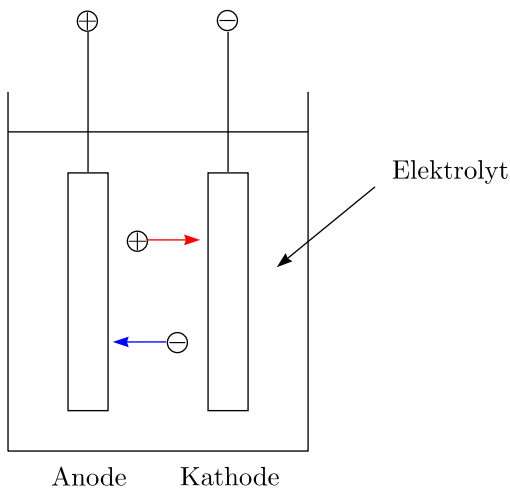
Stromerzeugung ist möglich, wenn positive von negativen Ladungen getrennt worden sind.

- * Generatoren: Magnetodynamische Stromerzeugung (aktive Stromerzeugung)
- * Netzgeräte: Strom- und Spannungsumwandlung (passive Stromerzeugung)
- * Batterien, Akku: Elektrochemische Stromerzeugung (aktive Stromerzeugung)
- * Solargeneratoren: Photoeffekt (aktive Stromerzeugung)



- * Thermoelektrizität: Stromerzeugung durch Berührungsspannungen

3.3.1 Elektrochemische Prozesse

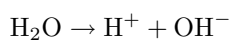
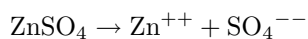
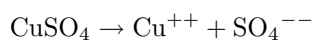


- * Elektrolyt:
Ein Elektrolyt ist ein Stoff, der geschmolzen oder in wässriger Lösung in Ionen dissoziiert wird.
- * Ion:
Geladenes Atom/Molekül („Wandernde“)

Betrachten wir folgende Vorgänge, die sich in einem Elektrolyten abspielen können:

a.) Dissoziation

Beispiel:



b.) Ionenwanderung

Bei Anlegen eines elektrischen Feldes bewegen sich die Ionen in einem Elektrolyt entlang der elektrischen Feldlinien. Für die Wanderungsgeschwindigkeiten v^+ der Kationen und v^- der Anionen gilt hierbei folgender Zusammenhang:

$$v^+ = b^+ \cdot E$$

$$v^- = b^- \cdot E$$

E ist die elektrische Feldstärke und b die Beweglichkeit.

$$[b] = \frac{\text{m}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}$$

Beispiel:

Für ein Wasserstoffion (Proton) beträgt die Beweglichkeit $b^+ = 31,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$. Für die Wanderungsgeschwindigkeit im Wasser bei einer elektrischen Feldstärke von $1 \frac{\text{V}}{\text{m}}$ gilt dann:

$$v^+ = b^+ \cdot E = 31,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}} \cdot 1 \frac{\text{V}}{\text{m}} = 31,5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Für die Beweglichkeiten anderer Ionen gilt:

* Hydroxidion (OH^-):

$$b^- = 17,9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

* Natriumion (Na^+):

$$b^+ = 4,3 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

* Chloridion (Cl^-):

$$b^- = 6,9 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

Für die Stromdichte j^\pm der Ionen folgt:

$$j^\pm = z^\pm \cdot e \cdot v^\pm \cdot n^\pm = \boxed{z^\pm \cdot e \cdot b^\pm \cdot E \cdot n^\pm}, \text{ wobei } n = \frac{\text{Ionen}}{\text{m}^3}$$

Die gesamte Stromdichte ergibt sich additiv aus den Stromdichten der Kationen j^+ und der Anionen j^- :

$$j = j^+ + j^-$$

Damit folgt dann für den Strom durch einen Elektrolyten:

$$I = A \cdot e (z^+ b^+ n^+ + z^- b^- n^-) \cdot \frac{U}{l} \propto U$$

Es liegt also ein OHMSches Verhalten vor.

* Spezifischer Widerstand:

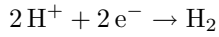
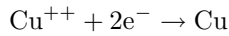
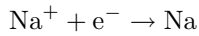
$$\rho \sim 10^2 \Omega\text{m} \approx 10^6 \cdot \rho_{\text{Metall}}$$

c.) Elektrolyse:

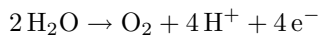
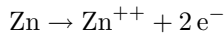
Abscheidung der Ionen an den Elektrolyten, Zersetzung der Elektroden

* Kathode:

Hier findet Reduktion (Elektronenaufnahme) statt:

* Anode:

Hier haben wir Oxidation (Elektronenabgabe):



Ein Mol eines Ions der Ladung $z^{\text{Ion}} \cdot e$ transportiert die Ladung $Q = N_A \cdot z^{\text{Ion}} \cdot e = F \cdot e^{\text{Ion}}$.

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \text{ (LOSCHMIDTZahl)}$$

$$F = N_A \cdot e = 96485 \frac{\text{C}}{\text{mol}} \text{ (FARADAYkonstante)}$$

Beispiel:

Wieviel Kupfer wird bei $I = 1 \text{ A}$ pro Sekunde abgeschieden?

1 mol Kupfer besitzt eine Masse von 63,5 g.

$$1 \text{ A} = 1 \frac{\text{C}}{\text{s}}$$

Damit berechnet sich dann die transportierte Ladung mittels der FARADAYkonstante nach der obigen Formel:

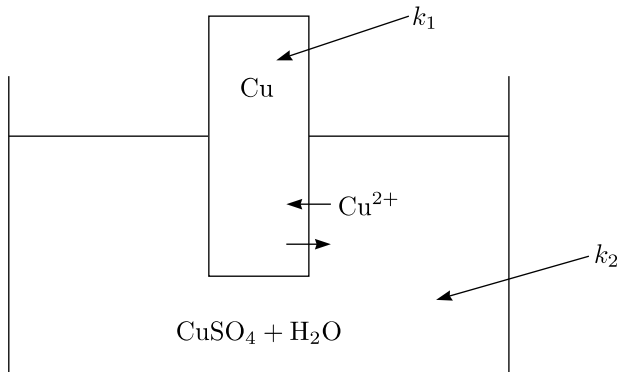
$$Q(1 \text{ mol Cu}^{++}) = 2 \cdot 96 \cdot 10^4 \text{ C} = 1,9 \cdot 10^5 \text{ C}$$

Damit ergibt sich also die abgeschiedene Menge an Kupfer:

$$m = \frac{1 \text{ mol}}{Q(1 \text{ mol})} \cdot 1 \text{ C} = \frac{63,6 \text{ g}}{2 \cdot 96 \cdot 10^4 \text{ C}} \cdot 1 \text{ C} = \boxed{0,33 \text{ mg}}$$

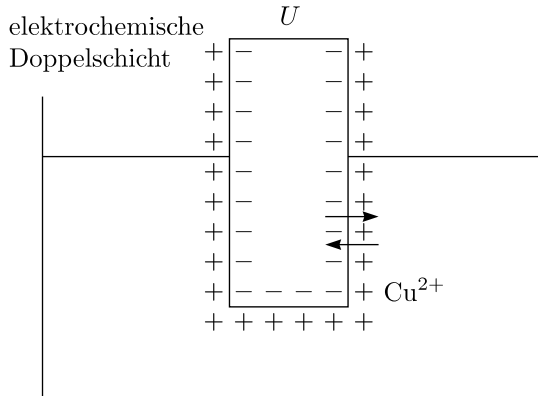
d.) Galvanik:

Stoffaustausch zwischen Elektrode und Elektrolyt durch Diffusion



$k_2 \hat{=}$ Konzentration der Ionen

Wir würden erwarten, daß dieser Stoffaustausch so lange stattfindet, wie $k_1 \neq k_2$ ist. Mehr Ionen verlassen Elektrode als in sie eintreten. Es entsteht dabei eine sogenannte elektrochemische Doppelschicht.



Das Aufladen der Elektrode bremst den Zufluß der Ionen. Es entsteht ein Gleichgewicht, das sich mittels der BOLTZMANNformel berechnet:

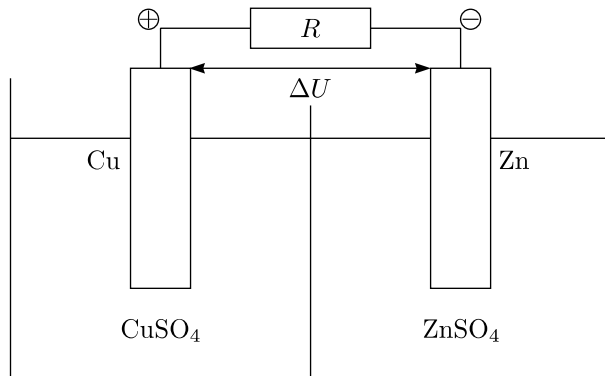
$$\frac{k_2}{k_1} = \exp\left(-\frac{e \cdot U}{kT}\right)$$

$$e \cdot U = W(\text{Metall}) - W(\text{Flüssigkeit})$$

$$k \hat{=} 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

Im Fall von Cu und Cu^{++} findet eine Aufladung der Elektrode auf $U = 0,34 \text{ V}$ gegenüber dem Elektrolyt statt. Bei Zn und Zn^{++} lädt sich die Elektrode auf $U = -0,76 \text{ V}$ auf, da $W(\text{Metall}) < W(\text{Lösung})$.

Anwendung: Daniell-Element



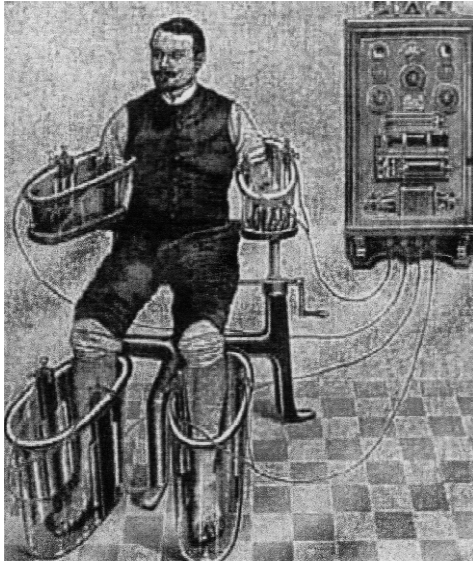
$$\Delta U = U_{\text{Cu}} - U_{\text{Zn}} = 1,1 \text{ V}$$

In 1 mol Ionen pro Liter wäßriger Lösung ergibt sich (VOLTAsche Spannungsreihe):

Material	$U [\text{V}]$
Li	-3,02
Na	-2,71
Zn	-0,76
Pb	-0,13
Pt	0
Cu	+0,34
Ag	+0,80
Au	+1,50

1. VOLTA (1745-1827): Stromerzeugung
2. GALVANI (1737-1798) : Strom durch Metallelektroden, Tiergewebe

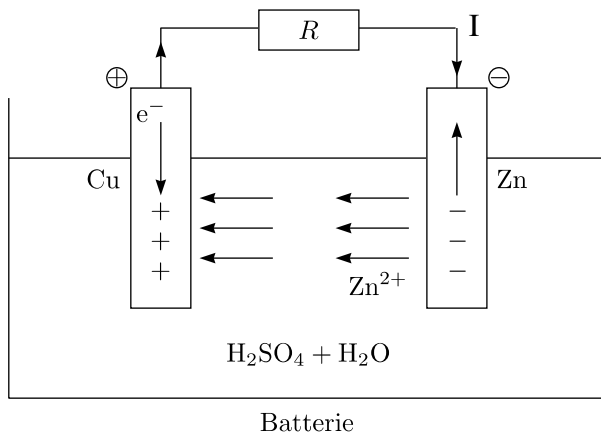
3.3.2 Galvanische Elemente/Batterien



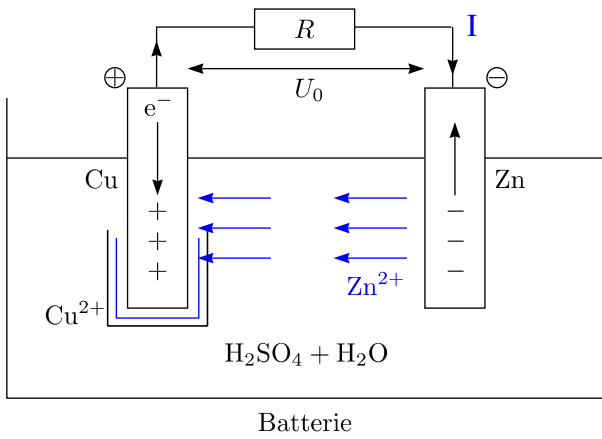
Galvanismus war die Anwendung der direkten Einwirkung von Spannung auf den menschlichen Körper. Frühe Beispiele, welche auf Benjamin Franklin zurückgehen, beinhalten Maschinen zur Erzeugung statischer Elektrizität, wie beispielsweise die Maschinen von Wimshurst und Holtz.

Galvanische Elemente waren häufig 1,5V-Trockenzellen, welche in Reihe geschaltet wurden und an eine große elektrische Schalttafel angeschlossen waren. Sie wurden im allgemeinen zur Elektrolyse genutzt aber auch in vielen Gesichtspunkten der Elektrotherapie. Die sich ergebenden Stromschläge waren oft ziemlich schmerzhaft und verursachten heftige Muskelkontraktionen.

a.) 2 Elektroden in **einem** Elektrolyten



Dies geht so lange, bis die Kupfer-Elektrode von Zink umgeben ist. Daher:



Der Prozeß ist genau dann beendet, wenn das CuSO_4 „verbraucht“ ist.

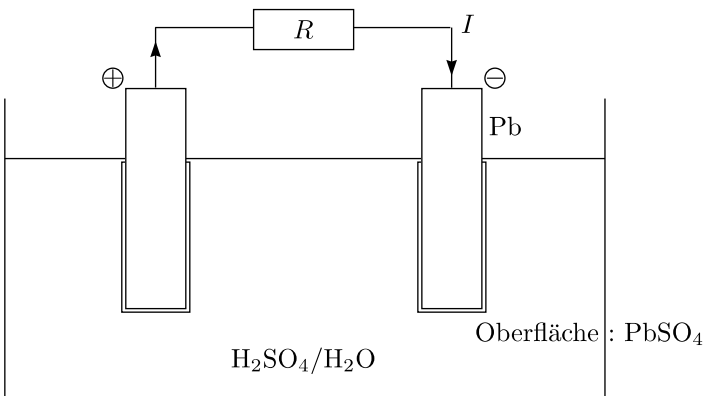
3.3.3 Akkumulatoren

Ein Akkumulator besteht aus 2 Elektroden aus gleichem Material im Elektrolyt.

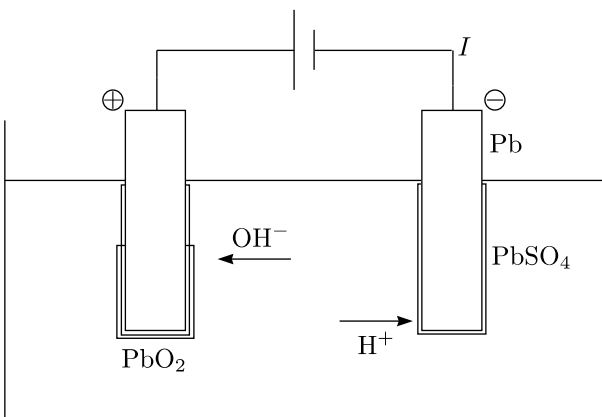
Beispiel:

$\text{Pb} + \text{H}_2\text{SO}_4$

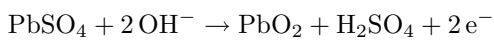
a.) Aufbau:



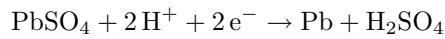
b.) Aufladen:



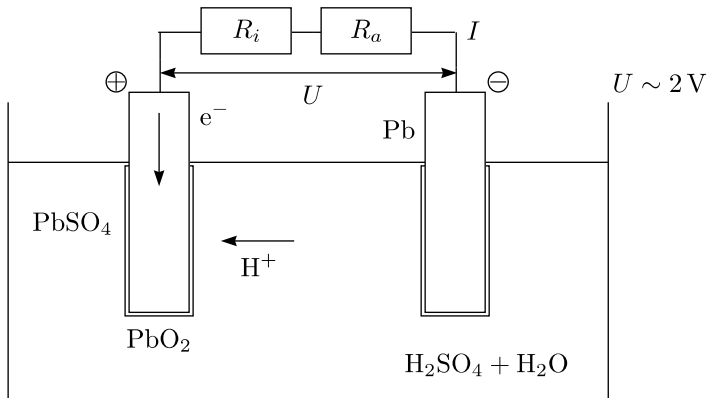
* Anode:



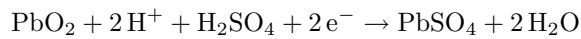
* Kathode:



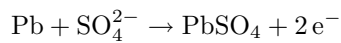
c.) Entladung:



* Anode:



* Kathode:

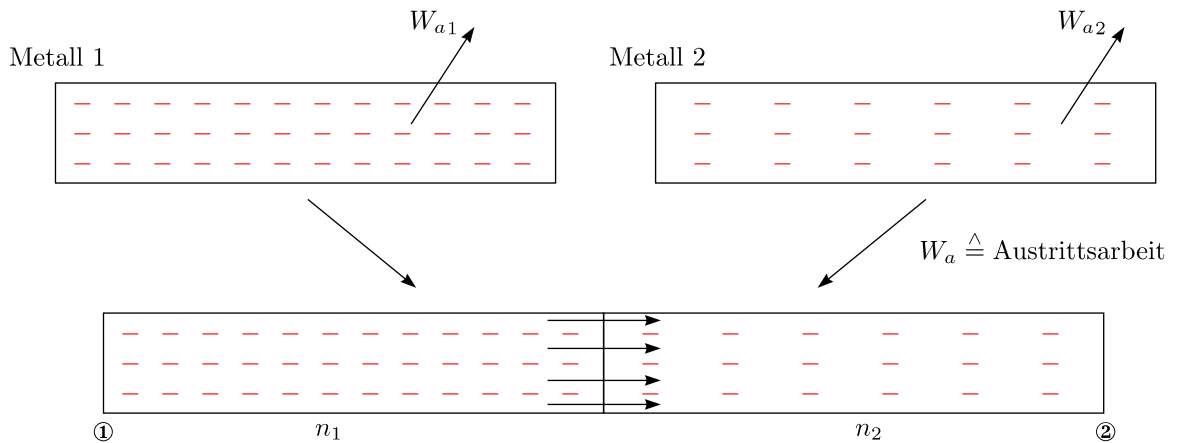


* Speicherkapazität:

$$\text{Typ } 30 \frac{\text{Wh}}{\text{kg}} \text{ Pb}$$

3.3.4 Thermoelektrizität

a.) Kontaktspannung:



Diffusion von e^- ins Metall mit $W_{a2} > W_{a1}$

Es fließt so lange Ladung, bis sich ein Gleichgewicht ausgedrückt durch die BOLTZMANNverteilung (eigentlich Fermiverteilung) eingestellt hat:

$$\frac{n_1}{n_2} \approx \exp\left(-\frac{\Delta W_a}{kT}\right)$$

Im Gleichgewicht besteht eine Potentialdifferenz, die sich mit der Ablösearbeit W_a schreiben läßt als:

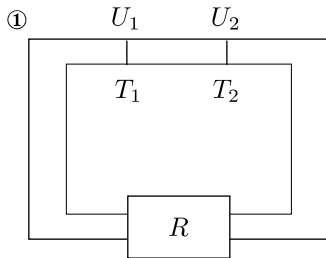
$$U = \frac{\Delta W_a}{e}$$

Damit folgt:

$$U = -\frac{kT}{e} \ln \frac{n_1}{n_2}$$

$$\frac{k}{e} \approx 100 \frac{\mu\text{V}}{\text{K}}$$

b.) Zwei Kontakte im geschlossenen Stromkreis:

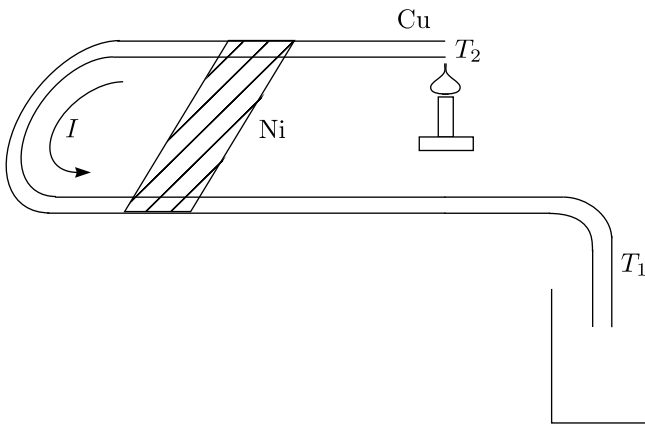


Für $T_1 = T_2$ gilt:

$$U_1 = -U_2$$

$$U = U_2 + U_1 = \frac{k}{e} \ln \frac{n_1}{n_2} \cdot (T_2 - T_1) = \alpha \cdot \Delta T$$

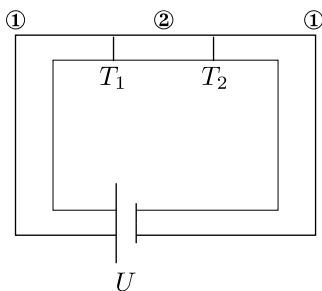
Demonstration:

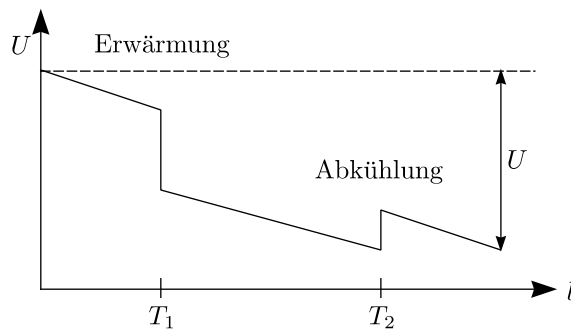


$$\Rightarrow I \sim O(100 \text{ A})$$

Eine mögliche Anwendung des Effekts liegt in der Temperaturmessung.

c.) PELTIEReffekt:





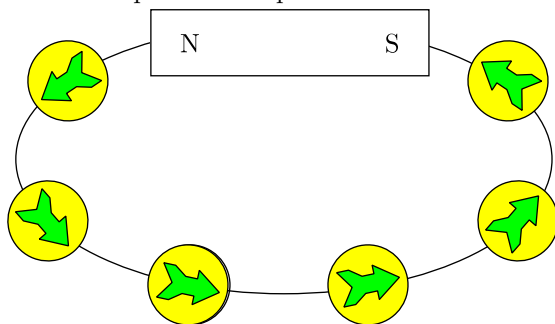
- * Erhitzung auf T_1
- * Abkühlung auf T_2

Dies geht solange, bis $\Delta T = 50^\circ\text{C}$ (wobei $T_1 > T_2$). Der PELTIEREffekt wird dazu verwendet, elektrische Geräte zu kühlen.

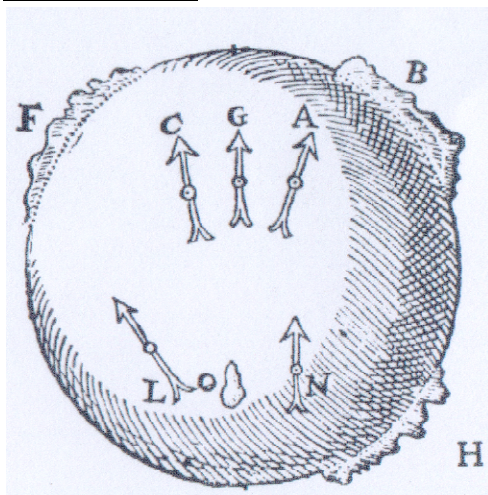
Kapitel 4

Statische Magnetfelder

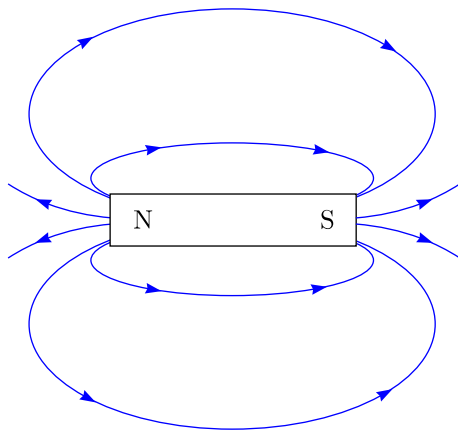
- * MARICOURT (1269): Versuche an einem runden „Magnetstein“ (Magnetit, Fe_3O_4)
Die Metallnadel richtet sich entlang geschlossener Kreise aus, ausgehend von zwei entgegengesetzt gelegenen „Polen“. In weiterer Folge: Jeder Magnet hat, unabhängig von der Form, zwei magnetische Pole: Nordpol und Südpol.



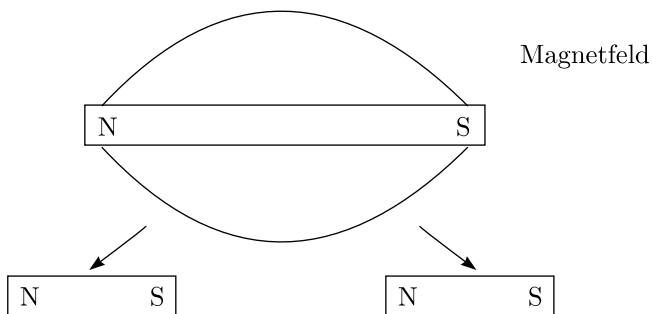
- * GILBERT (1600): „Auch die Erde ist ein großer Magnet.“



Magnetische Pole treten immer paarweise auf. (Magnetische Monopole wurden bis heute noch nicht nachgewiesen.) Elektrische Ladungen kann man separieren (+,-).

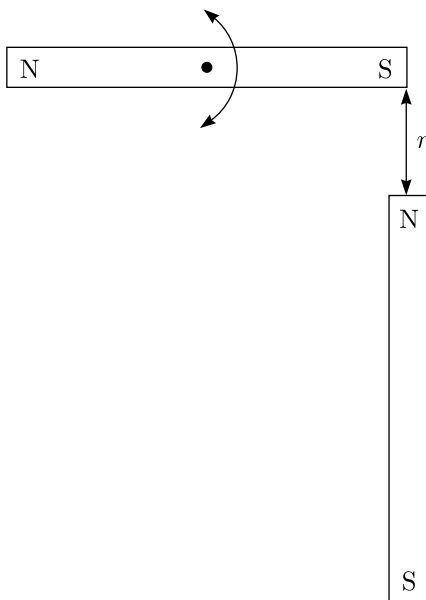


Permanentmagnete:



Magnete treten nicht als Monopole auf. Folglich ist es nicht möglich, magnetische Ladungen zu trennen.

Kräfte zwischen Magneten:



$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\mu_0} \cdot \frac{P_1 \cdot P_2}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

Diese Kraftgleichung ist analog zur Kraftgleichung der COULOMBkraft.

$\mu_0 \hat{=}$ Permeabilitätskonstante

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Die Feldstärke ist historisch folgendermaßen definiert:

$$\vec{H} = \lim_{P_2 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_{\text{magn}}}{P_2}$$

$$[H] = \frac{\text{A}}{\text{m}}$$

Folgende Definition für die magnetische Flußdichte B ist Konvention:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H}$$

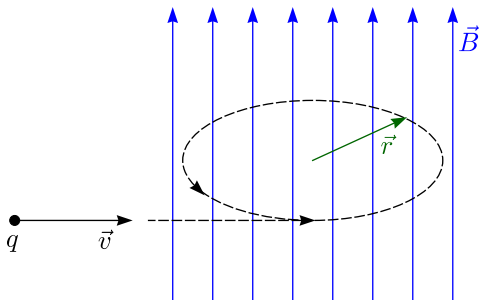
$$[B] = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = 1 \text{ T (Tesla)} = 10^4 \text{ G (GAUSS)}$$

Beispiel:

- * Erdmagnetfeld: $\langle B \rangle = 20 \mu\text{T} = 0,2 \text{ G}$
- * CMS-Detektor: $B = 4 \text{ T}$
- * Labormagneten: $B \approx O(100 \text{ T})$

4.1 Magnetfeld stationärer Ströme

4.1.1 Punktladung im Magnetfeld



Die Punktladung erfährt die sogenannte **Lorentzkraft**:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Das Teilchen durchläuft eine Kreisbahn:

$$q \cdot v \cdot B = m \cdot a = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Damit folgt der Radius r der Kreisbahn:

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

A.) LORENTZkraft:

$$F = \underbrace{q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}_{\text{Magnetfeld}} + \underbrace{q \cdot \vec{E}}_{\text{Elektrisches Feld}}$$

Im **E-Feld** erfährt q eine lineare (zeitlich konstante) Beschleunigung:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} = m \cdot \vec{a}$$

Wir lösen nach \vec{a} auf:

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

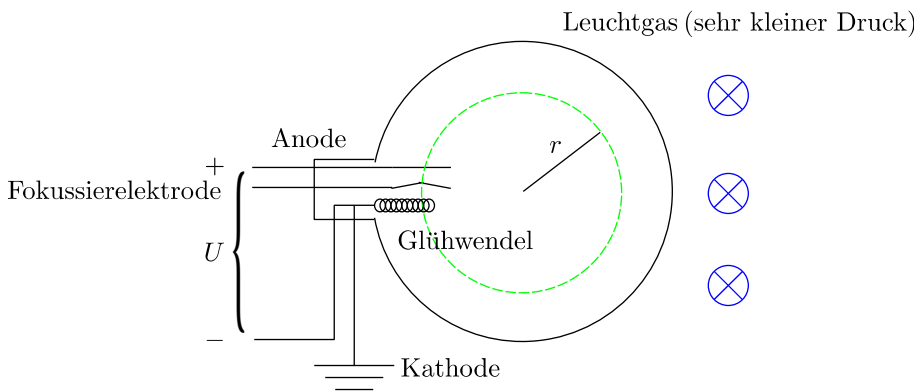
Im **B-Feld** erfährt q eine Zentripetalbeschleunigung:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = m \cdot \vec{a}$$

$$a = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} = \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B}$$

Demonstration: Wehnelt-Rohr (Fadenstrahlrohr)



$$E = e \cdot U = \frac{1}{2}mv^2$$

Nach der Beschleunigung hat das Teilchen eine Geschwindigkeit v von:

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \{300 \text{ V}\}$$

Im \vec{B} -Feld durchläuft es dann eine Kreisbahn mit dem Radius:

$$r = \frac{\sqrt{\frac{2mU}{e}}}{B}$$

Damit kann experimentell die **spezifische Ladung** $\frac{e}{m}$ bestimmt werden:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2}$$

Für Elektronen liegt diese in folgender Größenordnung:

$$\frac{e}{m} = 1,8 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

* Umlauffrequenz:

Mit $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m v}{v \cdot q \cdot B} = \frac{2\pi m}{q \cdot B}$ ergibt sich:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{q \cdot B}{2\pi m}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{q \cdot B}{m}$$

Zyklotronfrequenz

Beispiel:

Mit $B = 12 \text{ G}$ erhält man für die Zyklotronfrequenz:

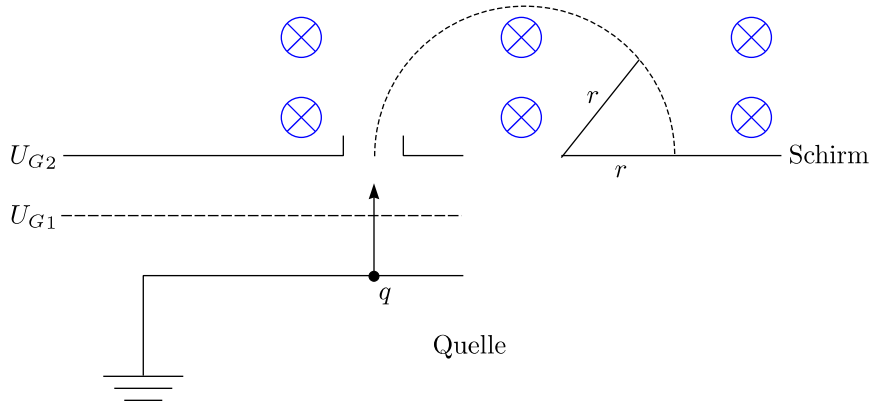
$$\omega = 12 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot 10^{-4} \cdot 1,8 \cdot 10^4 \frac{\text{As}}{\text{kg}} = \boxed{2,2 \cdot 10^8 \text{ Hz}} (!)$$

Das heißt:

$$\boxed{v \approx 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} (!)$$

B.) Anwendungen:

a.) Massenspektrometer:



Quelle: m, q

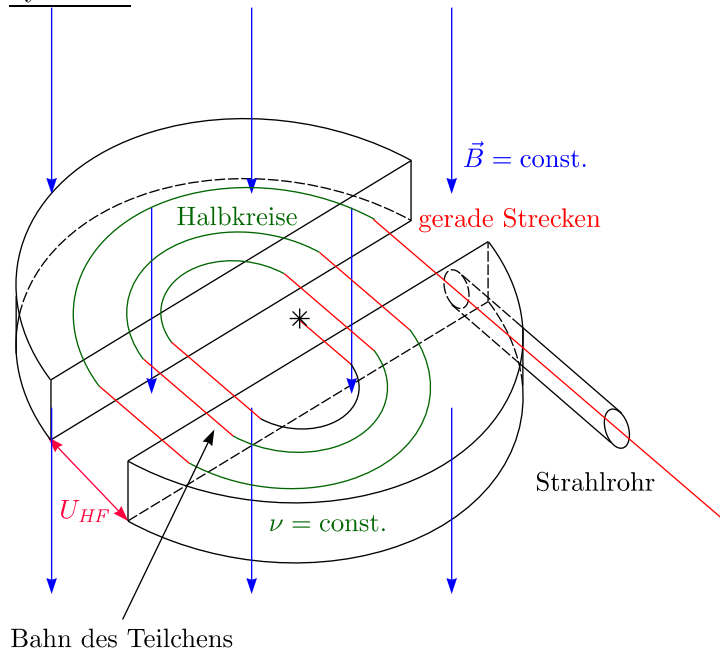
$$m = \frac{B^2 \cdot r^2 \cdot q}{2U}$$

$$U = U_{G2} - U_{G1}$$

b.) Magnetische Flaschen/Fallen

c.) Teilchenbeschleuniger

* Zyklotron:



Die Umlauffrequenz ist konstant:

$$\nu = \frac{e}{2\pi m} \cdot B = \text{const.}$$

Der **Energiegewinn** pro Umlauf beträgt $2 \cdot \langle U \rangle \cdot e$.

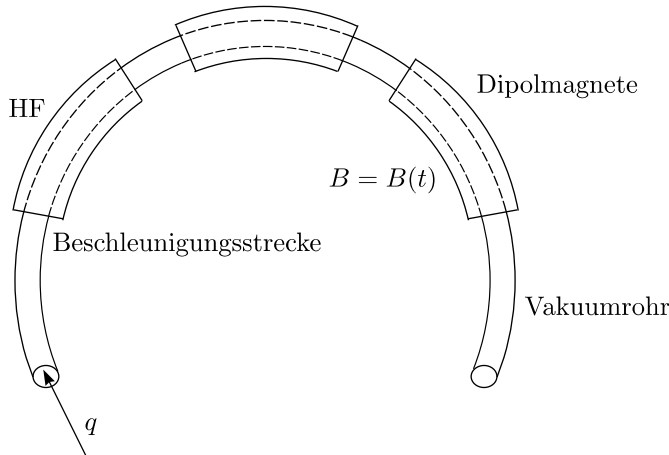
⇒ Beschleunigung und Bewegung kommt aus der Phase.

⇒ Das Zyklotron funktioniert nur für $v \ll c$ beispielsweise für Protonen $E \sim 10 \text{ MeV}$

* Synchrotron

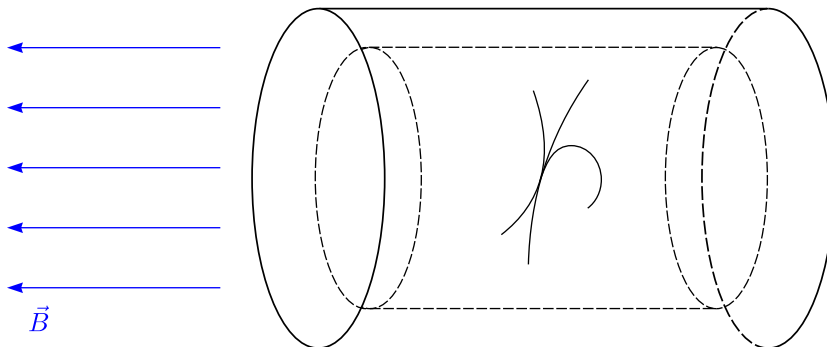
Dieses benutzt man für relativistische Teilchen ($v \approx c$).

$\mu = \text{const.}$



Dies funktioniert so, daß B mit der Energie von q ansteigt.

d.) Detektoren:



Man benutzt Detektoren zur Impulsbestimmung von geladenen Teilchen (auch Ladung).

$$p = q \cdot B \cdot r$$

$$[p] = 1 \frac{\text{GeV}}{c}$$

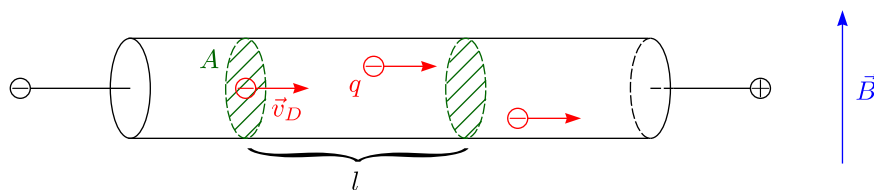
$$[q] = 1e$$

$$[B] = 1 \text{ T}$$

$$[r] = 1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow p = 0,3 \cdot q \cdot B \cdot r$$

4.1.2 Kräfte auf Ströme im Magnetfeld



Für die Kraft auf ein einzelnes Elektron, das sich mit der Driftgeschwindigkeit \vec{v}_D im Magnetfeld \vec{B} bewegt, ergibt sich:

$$\vec{F}_i = q \cdot \vec{v}_D \times \vec{B}$$

Gesamtstrom durch Integration über die Querschnittsfläche A des Leiters:

$$I = \int_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_A \varrho \cdot v_D \, dA = \varrho \cdot v_D \cdot A$$

Für die Ladungsträgerdichte ϱ gilt:

$$\varrho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{l \cdot A}$$

Gesamtladung in einem Leiter der Länge l :

$$Q = \frac{I \cdot l}{v_D}$$

Daraus ergibt sich die Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v}_D \times \vec{B} = I \cdot l \cdot \frac{\vec{v}_D}{v_D} \times \vec{B}$$

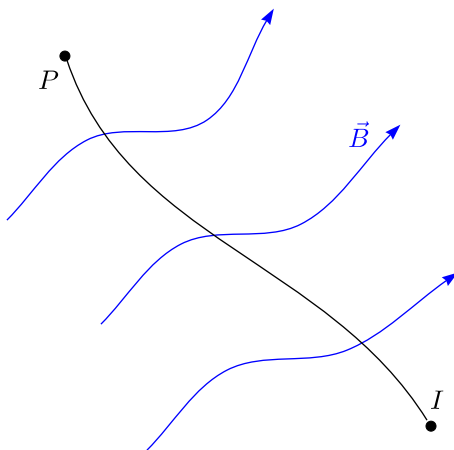
$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

Differentiell gilt:

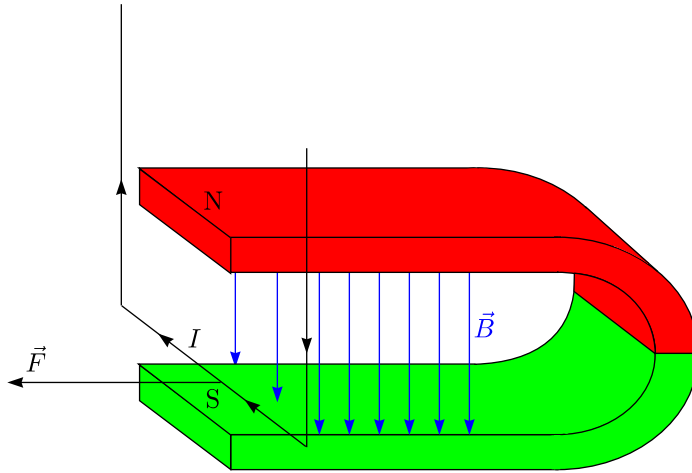
$$d\vec{F} = I \, d\vec{l} \times \vec{B}$$

Als verallgemeinerten Ausdruck für \vec{F} erhält man schlußendlich:

$$\vec{F} = I \int_P d\vec{l} \times \vec{B}$$



Demonstration: Leiterschleife im Hufeisenmagneten

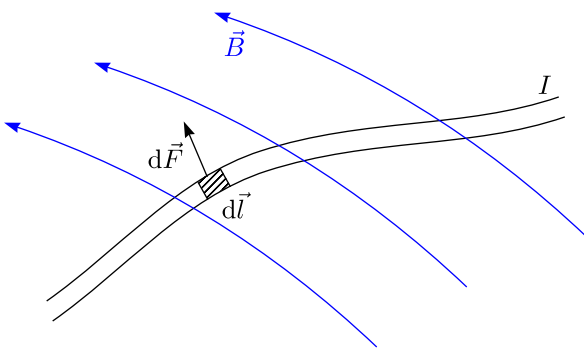


* Homogene Leiter:

$$\vec{F} = I \cdot \vec{l} \times \vec{B}$$

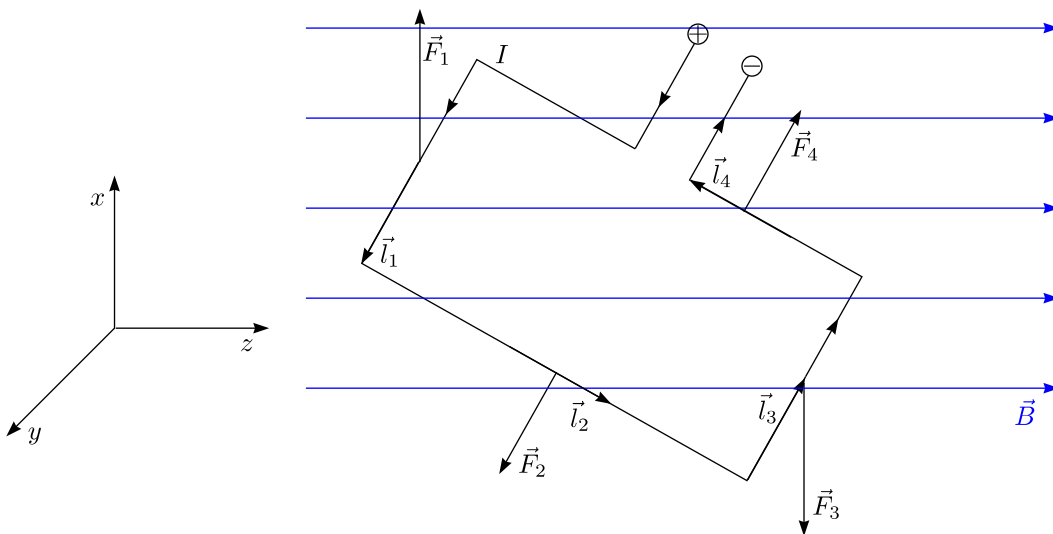
* Allgemeine Leiter:

$$\vec{F} = I \int_P d\vec{l} \times \vec{B}$$



Sonderfall:

a.) Kraft auf Leiterschleife:



Die Kräfte \vec{F}_1 und \vec{F}_3 sind betragsmäßig gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet:

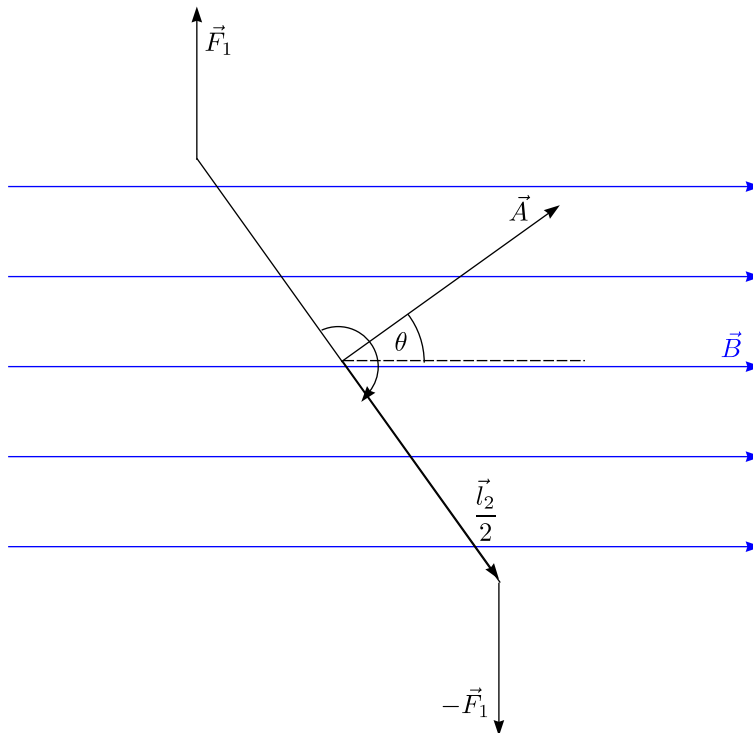
$$\vec{F}_3 = -\vec{F}_1 \quad (\vec{l}_3 = -\vec{l}_1)$$

Dies ist auch bei \vec{F}_2 und \vec{F}_4 der Fall:

$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$$

Die Summe aller Kräfte ist somit gleich Null:

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$



Die Kräfte verursachen aber ein Drehmoment:

$$\vec{M} = -\frac{\vec{l}_2}{2} \times \vec{F}_1 + \frac{\vec{l}_2}{2} \times (-\vec{F}_1)$$

$$\boxed{\vec{M} = -\vec{l}_2 \times \vec{F}_1}$$

Das Drehmoment zeigt in die Papierebene hinein. Die Kraft \vec{F} berechnet sich nach der zuvor hergeleiteten Beziehung:

$$\vec{F}_1 = I \cdot \vec{l}_1 \times \vec{B}$$

Damit folgt dann für den Betrag des Drehmoments:

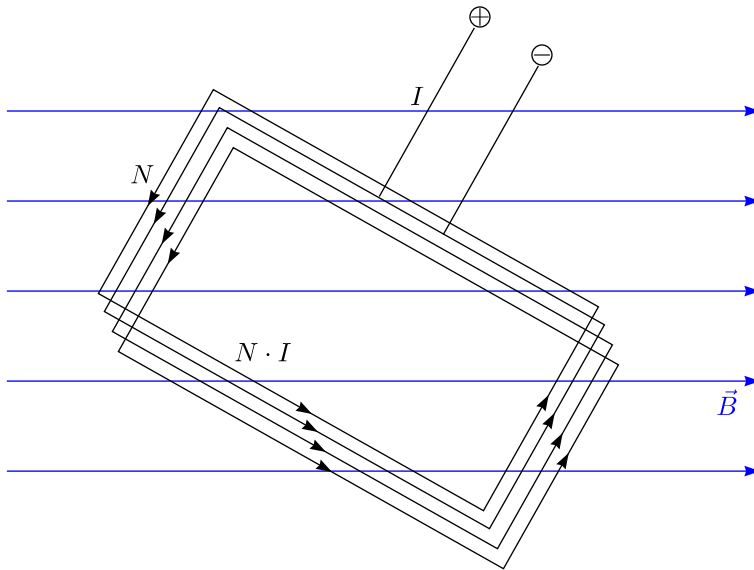
$$|\vec{M}| = I \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot B \cdot \sin \theta = \boxed{I \cdot A \cdot B \cdot \sin \theta}$$

Mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m} = I \cdot \vec{A}$ ergibt sich schließlich:

$$\boxed{\vec{M} = I \cdot \vec{A} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

Zusammenfassend kann man sagen: Körper mit magnetischem Moment erfahren ein Drehmoment im B-Feld.

b.) Spule im B -Feld:

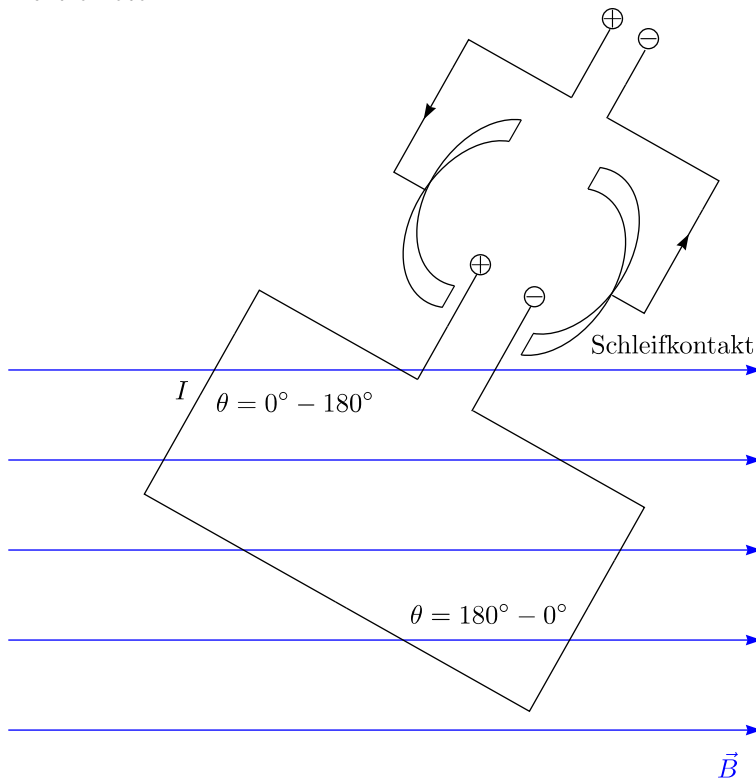


Da eine Spule aus N solchen Leiterschleifen besteht, folgt für das magnetische Dipolmoment:

$$\vec{m} = N \cdot I \cdot \vec{A}$$

c.) Anwendungen:

- * Galvanometer zur Strommessung
- * Elektromotor:

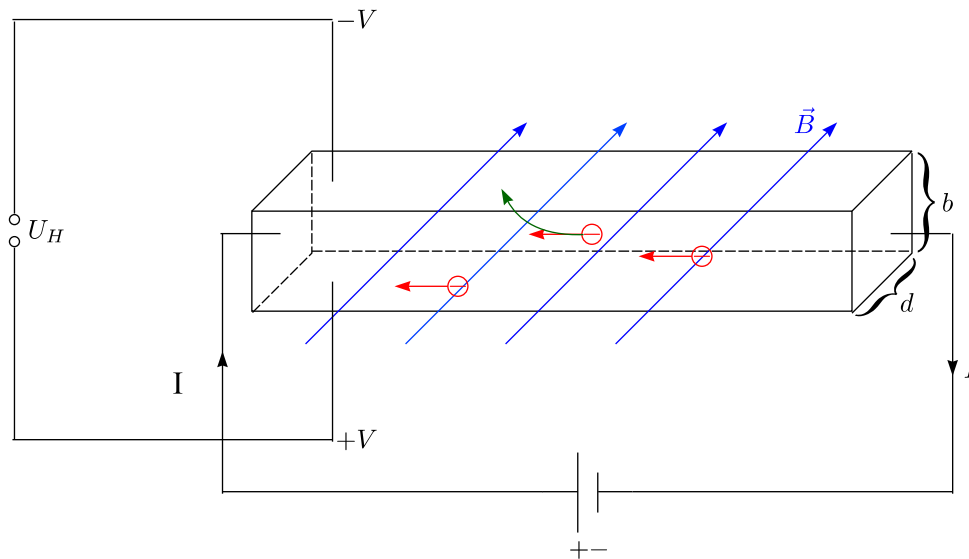


Funktion:

Der Strom wechselt die Richtung bei der Drehung. \Rightarrow Drehmoment immer in eine Richtung

4.1.3 Der Hall-Effekt

Trennung von Ladungen im stromdurchflossenen Material im \vec{B} -Feld



Die Elektronen driften nach oben, bis ein Gleichgewicht entsteht:

$$F_m = q \cdot v_D \cdot B = q \cdot E = F_e$$

Es baut sich die sogenannte **Hallspannung** auf:

$$U_H = b \cdot E = \boxed{v_D \cdot B \cdot b}$$

Messungen:

a.) Magnetfelder:

$$B = \frac{U_H}{v_D \cdot b}$$

Beispiel:

Es bestehe ein Magnetfeld $B = 1 \text{ T}$, die Dicke b der HALLsonde sei 1 cm . Außerdem gilt für die Driftgeschwindigkeit v_D der Elektronen:

$$v_D = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Damit ergibt sich also folgende HALLspannung:

$$U_H = v_D \cdot B \cdot b = 10^{-5} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 1 \text{ T} \cdot 1 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \boxed{100 \text{ nV}}$$

b.) Ladungsträgerdichte:

Die Stromstärke I läßt sich in folgende Terme zerlegen:

$$I = \underbrace{n \cdot q}_{\substack{\text{Ladung} \\ \text{Volumen}}} \cdot \underbrace{v_D \cdot A}_{\substack{\text{Volumen} \\ \text{Zeit}}}$$

Wir lösen nach der Ladungsträgerdichte n auf:

$$n = \frac{I}{A \cdot v_D \cdot e} = \frac{I}{b \cdot d \cdot v_D \cdot e}$$

Mit der HALLspannung U_H läßt sich n berechnen:

$$n = \frac{I \cdot B}{e \cdot d \cdot U_H}$$

c.) Materialeigenschaften:

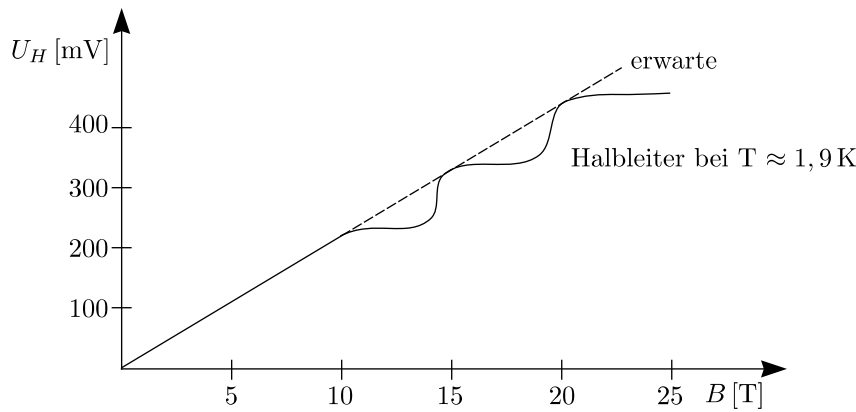
$$* U_H = \frac{I \cdot B}{n \cdot e \cdot d} \equiv A_H \cdot \frac{I \cdot B}{d}$$

$A_H \hat{=} \text{HALL-Konstante}$

$$* R_H \equiv \frac{U_H}{I} = A_H \cdot \frac{B}{d}$$

$R_H \hat{=} \text{HALL-Widerstand}$

Sonderfall: Quanten-Hall-Effekt (v.Klitzing (1980, 1985))



Die Spannung wächst in Quantensprüngen. Der Widerstand ist also gequantelt.

$$\underbrace{R_K}_{\text{v.KLITZING-Konstante}} \equiv \frac{h}{e^2} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2} \approx \underbrace{25813 \Omega}_{\text{Widerstandsnormal}}$$

$$R_H = \frac{R_K}{N} \text{ mit } N = 1, 2, 3, \dots$$

4.1.4 Magnetfelder von bewegten Ladungen

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$$

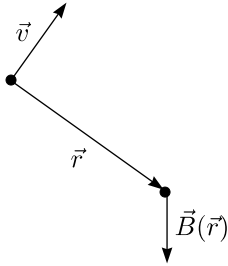
Für eine bewegte Ladung gilt:

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Mit $\mu_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ folgt:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{q \cdot \vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Man erkennt die Analogie zum COULOMBGesetz.

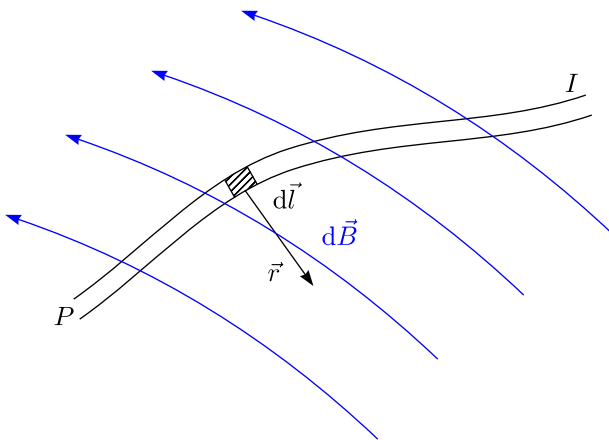


$$* \vec{B} \perp \vec{v}, \perp \vec{r}$$

$$* |\vec{B}| \propto q, \propto v, \propto \frac{1}{r^2}$$

4.1.5 Magnetfeld von Strömen

$$q \cdot \vec{v} \hat{=} I \cdot d\vec{l}$$



Für das Feld eines Stromelements $I \cdot d\vec{l}$ gilt somit:

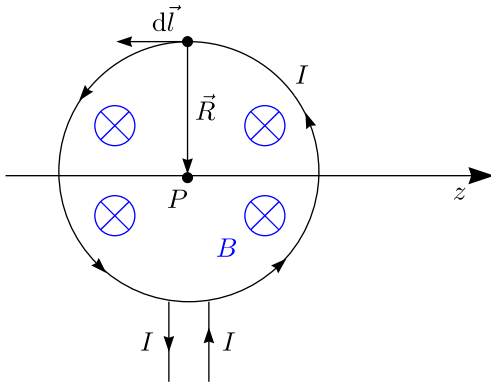
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Durch Integration erhalten wir das BIOT-SAVARTsche Gesetz:

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \underbrace{\int_P \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}}_{\text{BIOT-SAVART}}$$

Beispiel:

1. Magnetfeld einer Leiterschleife im Mittelpunkt:



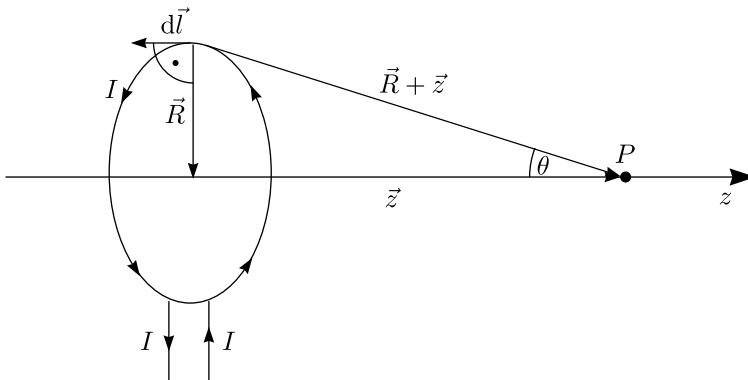
Differentiell gilt:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I d\vec{l} \times \frac{\vec{R}}{R^3}$$

\vec{B} zeigt in Papierebene hinein. Da $\frac{\vec{R}}{R^3} \perp d\vec{l}$ gilt:

$$\vec{B} = \oint_P \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{1}{R^2} \cdot dl \cdot \sin(90^\circ) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \underbrace{\oint dl}_{2\pi R} \cdot \vec{e}_z = \boxed{\mu_0 \frac{I}{2R} \vec{e}_z}$$

2. Magnetfeld einer Leiterschleife auf der Achse durch Mittelpunkt:



Hier gilt $d\vec{B} \perp d\vec{l} \perp \vec{R} + \vec{z}$.

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times (\vec{R} + \vec{z})}{|\vec{R} + \vec{z}|^3}$$

Für das Feld in z-Richtung folgt:

$$\sin \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}$$

$$dB_z = dB \sin \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{|\vec{R} + \vec{z}|^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}} = \boxed{\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

Durch Integration gilt dann wieder:

$$B_z = \oint dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot I \cdot \frac{R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \underbrace{\oint dl}_{2\pi R}$$

$$\boxed{B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot I}$$

Aufgrund der Zylindersymmetrie gilt $B_x = 0$ und $B_y = 0$. Für große Abstände ($z \gg R$) ergibt sich:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2}{z^3} I$$

Mit dem magnetischen Moment $m \equiv \pi R^2 I$ resultiert das magnetische Dipolfeld:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3}$$

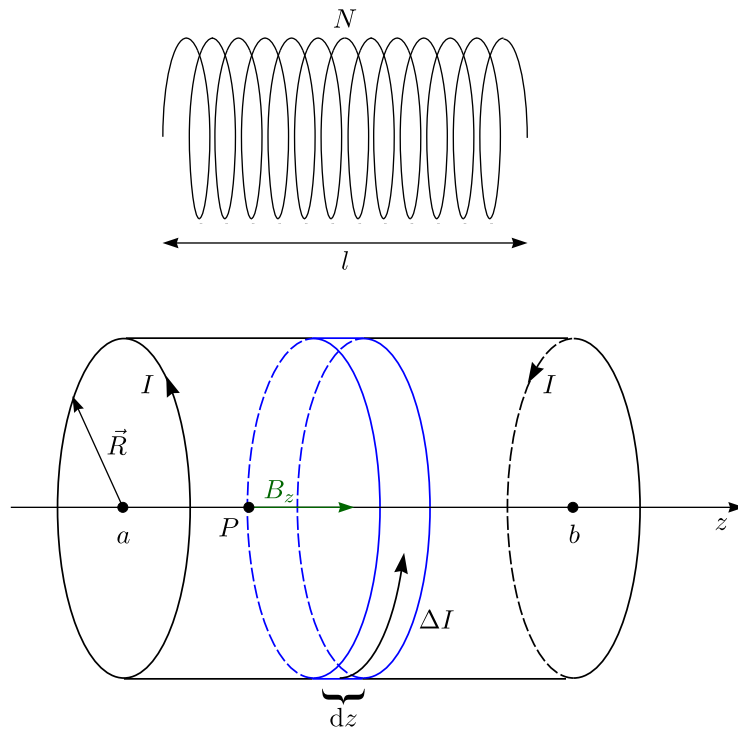
Vergleiche mit elektrischem Dipolfeld:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{z^3}, p \hat{=} \text{Elektrisches Dipolmoment}$$

3. Zylinderspule:

Die Spule habe den Radius R , die Länge l und bestehe aus N Windungen. Für die Dichte der Windungen gilt:

$$n = \frac{N}{l}$$



Wir können nun unser vorheriges Ergebnis des Magnetfeldes einer Leiterschleife benutzen, da ja eine Spule aus vielen solchen Leiterschleifen besteht:

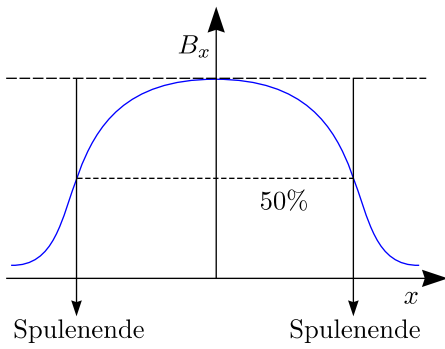
$$\Delta I = n \cdot I \cdot \Delta z$$

$$\Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta I$$

Damit ergibt sich das Gesamtfeld am Ursprung P :

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi n \cdot IR^2 \int_{-a}^b \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + R^2}} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}} \right)$$

$$\left[\frac{z}{R^2(z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_{-a}^b$$



Als Sonderfall betrachten wir eine sehr lange Spule ($l \gg R$):

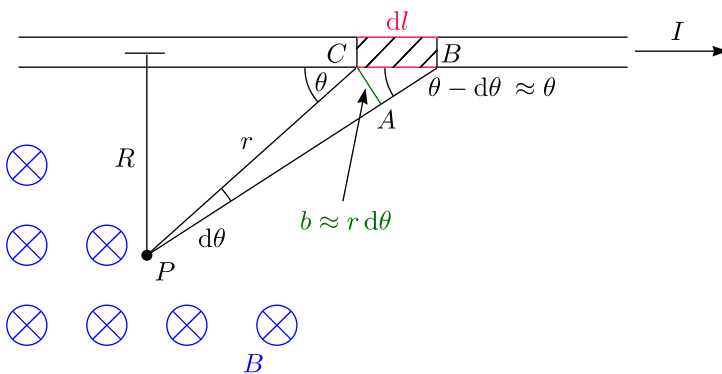
* B_z im Zentrum ($a = b$):

$$\frac{1}{2} \mu_0 n I \cdot 2 = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot N}{l}$$

* B_z auf Achse an einem Ende ($a = 0$):

$$B_z = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot \frac{IN}{l} = \frac{B_z(\text{Zentrum})}{2}$$

4. Unendlich langer gerader Leiter:



$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot \sin \theta dl}{r^2}$$

Hierbei benutzen wir folgenden Trick als Hilfsmittel. Im Dreieck PAC stimmt die Länge b des Bogens über dem infinitesimal kleinen Winkel $d\theta$ näherungsweise mit der Dreiecksseite CA des rechtwinkligen Dreiecks CAB überein. Der eingezeichnete Winkel CBA in diesem Dreieck ist etwa so groß wie θ . Damit gilt also mit $b = r d\theta$:

$$\sin \theta = \frac{R}{r} \approx \frac{r d\theta}{dl}$$

Wir lösen nach dl auf und erhalten:

$$dl = \frac{r^2 d\theta}{R}$$

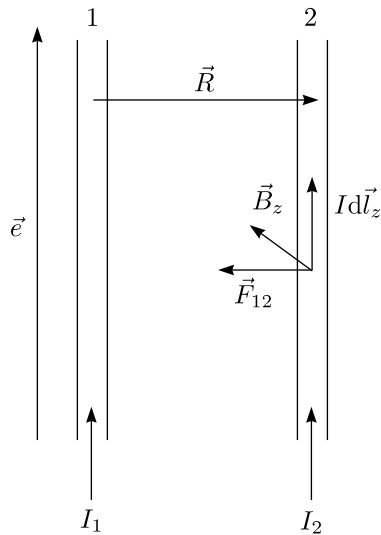
Oben eingesetzt gilt:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R} \cdot \sin \theta d\theta$$

Durch Integration von 0 bis π erhalten wir das magnetische Feld:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \boxed{\frac{\mu_0 I}{2\pi R}}$$

4.1.6 Kräfte zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern

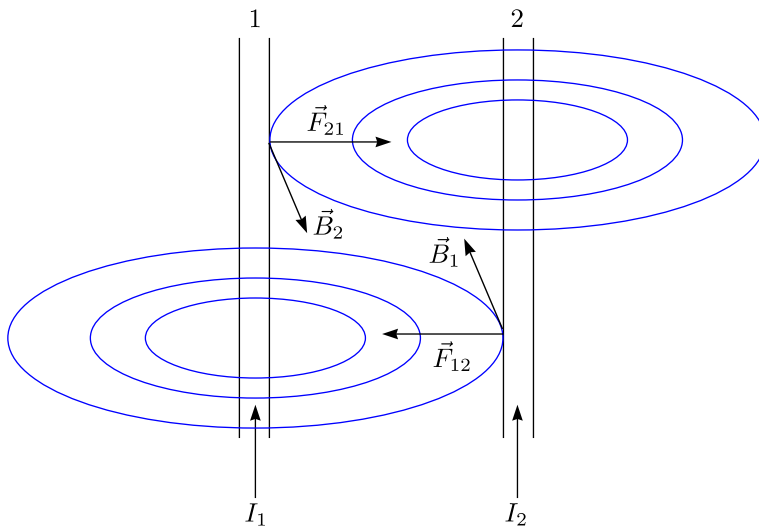


Das Magnetfeld eines Leiters ① im Abstand R erhält man mit der zuvor hergeleiteten Formel:

$$\vec{B}_1(R) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \cdot \vec{e}_{\vec{l} \times \vec{R}}$$

Dann ergibt sich die Kraft, die der Leiter ② im Magnetfeld des Leiters ① erfährt, als:

$$\vec{F}_{12} = I_2 \cdot \vec{l} \times \vec{B}_1 = -\frac{I_2 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot I_1}{2\pi R} \cdot \vec{e}_R = \boxed{-\mu_0 \cdot \frac{l \cdot I_1 I_2}{2\pi R} \vec{e}_R}$$



B_2 zeigt in entgegengesetzte Richtung von B_1 :

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi R} \cdot \vec{e}_{\vec{l} \times \vec{R}}$$

$$\vec{F}_{21} = I_1 \cdot \vec{l} \times \vec{B}_2 = +\frac{I_1 \cdot l \cdot \mu_0 \cdot I_2}{2\pi R} \vec{e}_R = \boxed{\mu_0 \cdot \frac{l \cdot I_1 I_2}{2\pi R} \vec{e}_R} = -\vec{F}_{12}!$$

Die beiden Kräfte sind gleich groß, aber entgegengesetzt gerichtet.

Definition des elektrischen Stroms:

Wenn von 2 unendlich langen Drähten mit $R = 1 \text{ m}$ zwei Stücke mit $l = 1 \text{ m}$ eine Kraft $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ erfahren, fließt $I = 1 \text{ A}$.

$$\vec{F} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ A} \cdot 1 \text{ m}}{2\pi \cdot 1 \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

Demonstration:

$$l = 1 \text{ m}$$

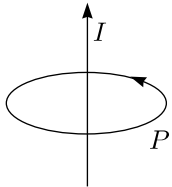
$$I = 15 \text{ A}$$

$$R = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

Damit folgt für die Kraft F :

$$F = \frac{225}{5 \cdot 10^{-2}} \cdot 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \approx \boxed{10^{-3} \text{ N}}$$

4.1.7 Das Ampèresche Gesetz



$$\oint_P \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot I \quad \left(\text{Vergleiche: } \oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \right)$$

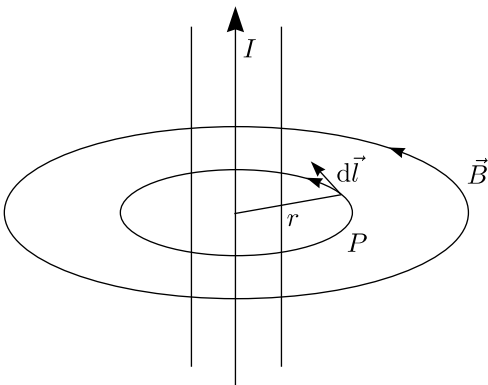
I ist die Quelle des Magnetfeldes. Das Ampèresche Gesetz ist gegeben durch:

$$\oint_P \vec{B} dl = \mu_0 \cdot I$$

$\mu_0 \cdot I$ ist hierbei die Quelle des Magnetfeldes. Vergleiche mit dem GAUSSschen Satz aus der Elektrodynamik:

$$\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Beispiel: Stromdurchflossener Draht

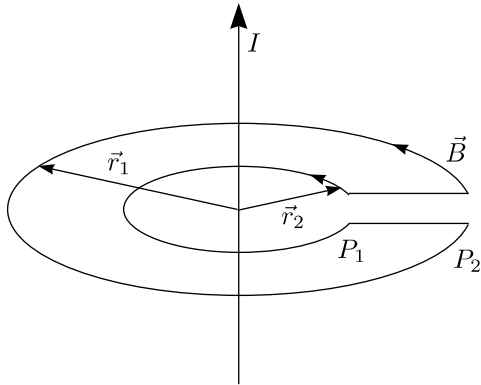


Wir hatten zuvor schon das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes berechnet:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_B$$

Da $\vec{e}_B \parallel d\vec{B}$, ist \vec{B} betragsmäßig konstant, wenn wir als geschlossenen Weg einen Kreis wählen, dessen Mittelpunkt auf der Mittelachse des Leiters liegt und dessen Radiusvektor senkrecht zum Leiter steht. Wir ziehen daher \vec{B} als Konstante vor das Integral:

$$\oint_P \vec{B} d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \underbrace{\oint_P dl}_{2\pi r} = \mu_0 I$$

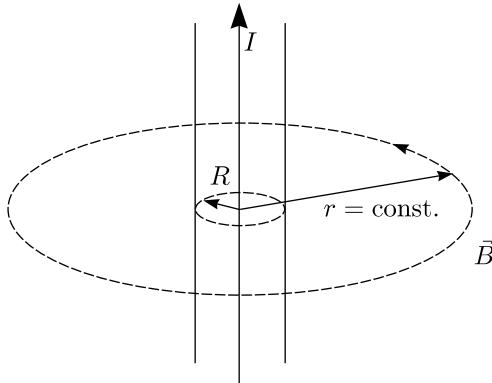


$$\int_{P_1} \vec{B}(r_1) d\vec{l} + \int_{P_2} \vec{B}(r_2) d\vec{l} = B(r_1) \cdot 2\pi r_1 - B(r_2) \cdot 2\pi r_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \cdot 2\pi r_1 - \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \cdot 2\pi r_2 = 0$$

An diesem Beispiel wurde die Richtigkeit des Ampèreschen Gesetzes überprüft.

Anwendung: Berechnung von Magnetfeldern

1.) Stromdurchflossener Leiter:



a.) $r > R$:

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

Damit gilt:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

b.) $r < R$:

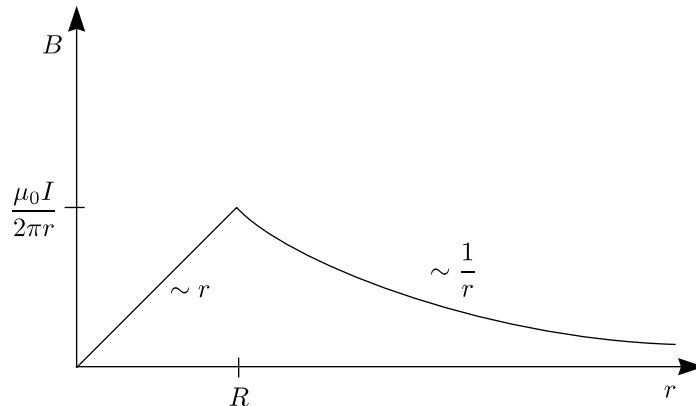
$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \cdot I(r)$$

$I(r)$ ist hierbei der Strom durch die Querschnittsfläche $A(r) = \pi r^2$.

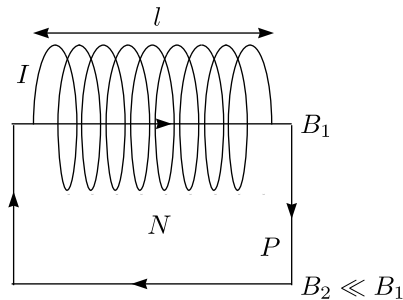
$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \cdot I(r) = \mu_0 \cdot I \cdot \frac{\pi r^2}{\pi R^2}$$

Damit folgt für das Magnetfeld

$$B = \mu_0 \cdot \frac{I}{2\pi R^2} \cdot r$$



2.) Spule mit N Windungen:



Bei einer langen Spule können Randfelder vernachlässigt werden, womit nur der Beitrag des Feldes im Innern der Spule wichtig ist:

$$\oint_P \vec{B} \, d\vec{l} = B \cdot l \stackrel{!}{=} \mu_0 \cdot I \cdot N$$

$$B = \frac{\mu_0 I \cdot N}{l}$$

Wir haben hierbei angenommen, daß B über Länge der Spule konstant ist.

4.2 Das Magnetfeld und sein Potential

4.2.1 Mathematischer Einschub

* Divergenz:

$$\operatorname{div} \vec{A} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

* Rotation:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} A_z - \frac{\partial}{\partial z} A_y \\ \frac{\partial}{\partial z} A_x - \frac{\partial}{\partial x} A_z \\ \frac{\partial}{\partial x} A_y - \frac{\partial}{\partial y} A_x \end{pmatrix}$$

* Gradient:

$$\operatorname{grad} V \equiv \vec{\nabla} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} V \\ \frac{\partial}{\partial y} V \\ \frac{\partial}{\partial z} V \end{pmatrix}$$

Insbesondere gilt:

$$* \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} V) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) V = 0$$

Konservative Felder haben keine Wirbel: $\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{o}$

$$* \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

Wirbelfelder haben keine Divergenz: $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

Beispiel:

* Wiederholung: GAUSSscher Satz des elektrischen Feldes

$$\boxed{\int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV = \oint_O \vec{E} \, d\vec{A}}$$

* STOKESScher Satz des Magnetfeldes:

$$\boxed{\int_A \operatorname{rot} \vec{B} \, d\vec{A} = \oint_P \vec{B} \, d\vec{s}}$$

Diese beiden Sätze gelten bekanntlich für alle Vektorfelder.

Beweis des Stokesschen Satzes:

$$\int_A \left(\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_P \vec{B} \, d\vec{s} \right) = \int_A \operatorname{rot} \vec{B} \, d\vec{A}$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \oint_P \vec{B} \, d\vec{s} = \operatorname{rot} \vec{B} \, d\vec{A}$$

Für die mehrdimensionale Taylor-Entwicklung folgt:

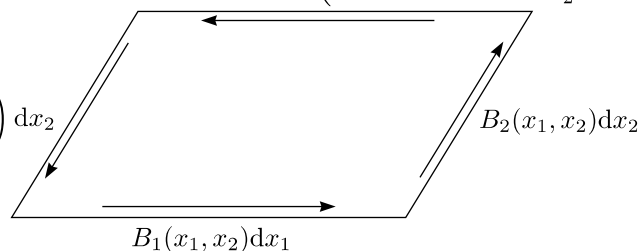
$$f(\vec{x} + d\vec{x}) \approx f(\vec{x}) + d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) + \left(\frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} dx_3 \right)$$

Man kann jede Fläche im Raum in Rechtecke einteilen, die jeweils parallel zu den drei Koordinatenebenen liegen. Für ein Rechteck, das parallel zur x_1 - x_2 -Ebene liegt, erhält man:

$$-B_1(x_1, x_2 + dx_2) dx_1 \approx - \left(B_1(x_1, x_2) + \frac{\partial B_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1$$

$$-B_2(x_1 - dx_1, x_2) dx_2 \approx$$

$$- \left(B_2(x_1, x_2) - \frac{\partial B_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2$$



Wir integrieren entlang der geschlossenen Kurve, welche das Rechteck umschließt:

$$\oint_P \vec{B} \, d\vec{s} = B_1 \, dx_1 + B_2 \, dx_2 - B_1 \, dx_1 - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \, dx_1 \, dx_2 - B_2 \, dx_2 + \frac{\partial B_2}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 = \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2$$

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint \vec{B} \, d\vec{s} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \oint \vec{B} \, d\vec{s} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2 = \left(\frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right)$$

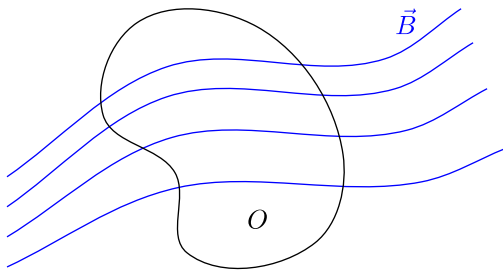
Dies ist genau eine Komponente von $\text{rot} \vec{B}$. Wenn man diese Integration noch für Rechtecke in der x_1 - x_3 -Ebene und der x_2 - x_3 -Ebene durchführt, so gelangt man zu den beiden anderen Komponenten der Rotation, also von $\text{rot} \vec{B}$. Damit ist der Satz bewiesen.

4.2.2 Magnetischer Kraftfluß

$$\phi_m = \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

Speziell für das Magnetfeld gilt:

$$\oint_O \vec{B} \, d\vec{A} = 0$$



Mittels des GAUSSSchen Satzes folgt:

$$\oint_O \vec{B} \, d\vec{A} = \int_V \text{div} \vec{B} \, dV$$

Damit gilt also für das Magnetfeld:

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Es gibt somit keine Quellen und Senken im \vec{B} -Feld.

$$\oint \vec{B} \, d\vec{l} = \mu_0 \cdot I = \mu_0 \cdot \int \vec{j} \, dA$$

Mittels des STOKESSchen Satzes gilt:

$$\int \text{rot} \vec{B} \, d\vec{A} = \int \mu_0 \vec{j} \, d\vec{A}$$

Und somit folgt:

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

4.2.3 Das Vektorpotential

Zur Erinnerung:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$$

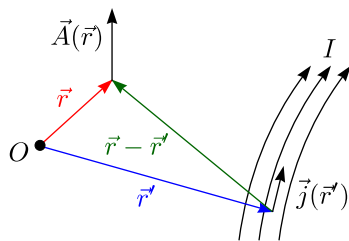
$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Dies funktioniert nicht für \vec{B} -Feld, weil aus $\vec{B} = -\vec{\nabla}V$ folgen würde, daß $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$ gelte, was ein Widerspruch zum Ampèreschen Gesetz darstellt. Wir machen somit einen Ansatz über die Rotation:

$$\boxed{\vec{B} = \text{rot } \vec{A}}$$

\vec{A} ist das sogenannte Vektorpotential des \vec{B} -Feldes.

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV}$$



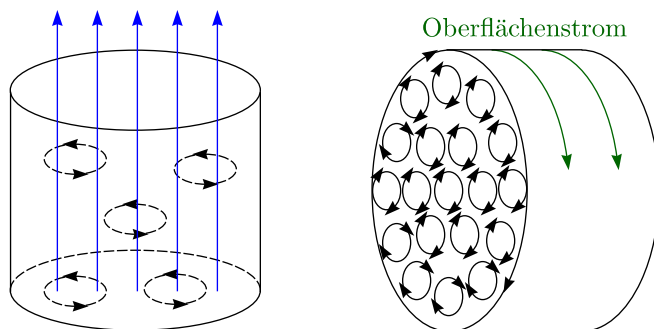
$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \text{ gilt für alle } \underbrace{\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla}W}_{\text{Unbestimmtheit}}.$$

Konvention: Coulombbeziehung

Wähle \vec{A} so, daß $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ ist.

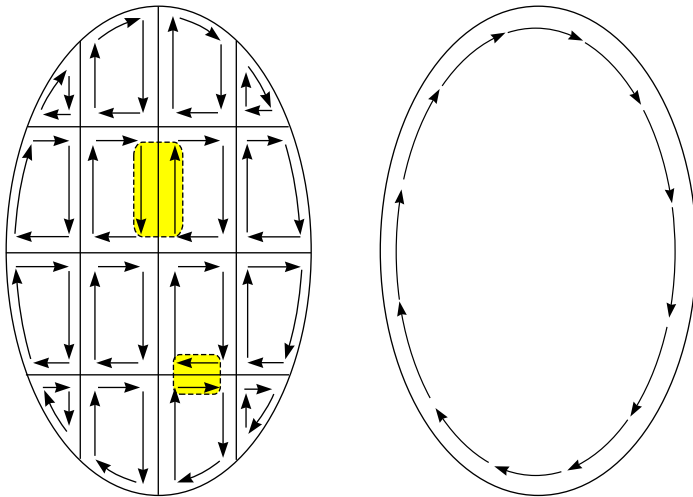
4.3 Materie im Magnetfeld

Magnetismus von Materie:

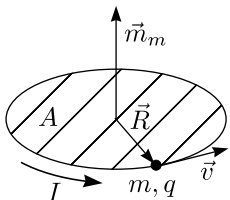


Modell atomarer Kreisströme, bei dem die magnetischen Momente parallel zur Zylinderachse orientiert sind. Innerhalb des Zylinders haben sich die Kreisströme auf. Dagegen fließt an seiner Oberfläche ein effektiver Kreisstrom, der dem Strom in den Wicklungen der Zylinderspule entspricht.

„AMPEREScher Strom“ \triangleq Strom in Zylinderspule



Klassische Vorstellung: Mikroskopische Kreisströme



Magnetisches Moment:

Die Ladung q erzeugt einen elektrischen Strom:

$$I = q \cdot \frac{v}{2\pi R} = q \cdot \nu \equiv q \cdot \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\vec{m}_m = I \cdot \vec{A} = q \cdot \frac{\vec{\omega}}{2\pi} \cdot \pi R^2 = \boxed{\frac{q}{2} \cdot R^2 \vec{\omega}}$$

Drehimpuls:

Für den Drehimpuls gilt bekanntlich:

$$\vec{L} = m (\vec{R} \times \vec{v}) = m \cdot R^2 \cdot \vec{\omega}$$

Oben eingesetzt, folgt dann für das magnetische Moment:

$$\boxed{\vec{m}_m = \frac{q}{2m} \vec{L}}$$

$\frac{q}{2m} \triangleq$ Gyromagnetisches Verhältnis

4.3.1 Atomares Bild

Blick über den Zaun: Quantenmechanik

Atome besitzen durch ihre Elektronenhülle magnetische Momente.

A.) Grundelemente:

Die Einheit ist das sogenannte Bohrsche Magneton:

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,93 \cdot 10^{-23} \text{ Am}^2$$

$h = 2\pi\hbar = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ mit $\hbar \hat{=} \text{PLANCKSches Wirkungsquantum}$

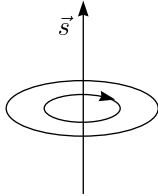
* Elektronenbahn:

$$\vec{m}_m = \frac{-e}{2m_e} \cdot \vec{l} = \boxed{-\mu_B \frac{\vec{l}}{\hbar}}$$

* Elektronenspin:

$$\boxed{\vec{m}_m = g \cdot \frac{-e}{2m_e} \vec{s}}$$

$g = 2$ ist der sogenannte LANDEFaktor.



Der Magnetismus der Atomkerne ist hier vernachlässigbar (wegen großer Masse). In Materie gilt für die Magnetisierung M :

$$\vec{M} \hat{=} \frac{\sum_i \vec{m}_{m_i}}{V}$$

Üblicherweise sind die \vec{m}_m ungeordnet. Also ist $\vec{M} = \vec{0}$. In einem äußeren Magnetfeld gilt für das Gesamtfeld:

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})}$$

$\vec{H} \hat{=} \text{Magnetische Erregung}$

$\vec{M} \hat{=} \text{Magnetisierung}$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \cdot \vec{H}}$$

$\chi_m \hat{=} \text{Magnetische Suszeptibilität}$

$1 + \chi_m \hat{=} \text{Relative Permeabilität } \mu_r$

Betrachten wir die magnetische Suszeptibilität verschiedener Materialien bei 20° C:

Material	χ_m
Aluminium	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Bismut	$-1,66 \cdot 10^{-5}$
Diamant	$-2,2 \cdot 10^{-5}$
Gold	$-3,6 \cdot 10^{-5}$
Kupfer	$-0,98 \cdot 10^{-5}$
Magnesium	$1,2 \cdot 10^{-5}$
Natrium	$-0,24 \cdot 10^{-5}$
Quecksilber	$-3,2 \cdot 10^{-5}$
Silber	$-2,6 \cdot 10^{-5}$
Titan	$7,06 \cdot 10^{-5}$
Wolfram	$6,8 \cdot 10^{-5}$
Kohlendioxid (1 atm)	$-2,3 \cdot 10^{-9}$
Sauerstoff (1 atm)	$2090 \cdot 10^{-9}$
Stickstoff (1 atm)	$-5,0 \cdot 10^{-9}$
Wasserstoff (1 atm)	$-9,9 \cdot 10^{-9}$

Sonderfall: Leere Spule

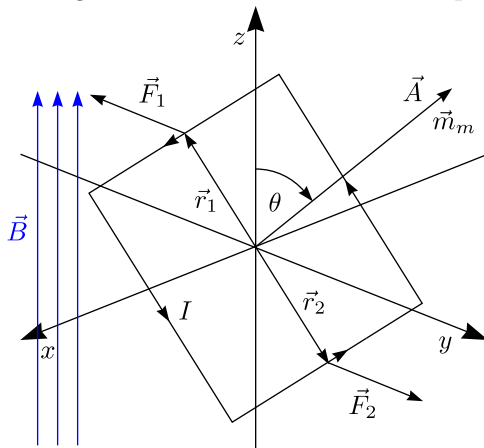
$$\vec{M} = \vec{\sigma}$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0 \cdot n \cdot I \cdot \vec{e}_B$$

B.) Magnetisches Moment im \vec{B} -Feld:

* Potentielle Energie: $E_m = -\vec{m}_m \cdot \vec{B}$

Analoge Diskussion zu elektrischem Dipol im \vec{E} -Feld:



Wir berechnen die geleistete Arbeit bei einer Drehung. Das Drehmoment lautet:

$$\vec{D} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{m}_m \times \vec{B}$$

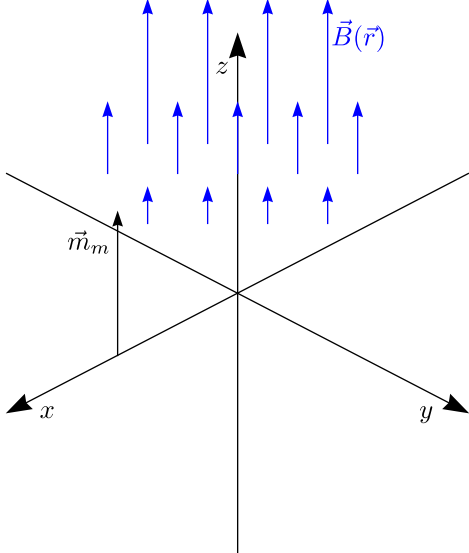
$$W = - \int_{\theta}^{90^\circ} D \, d\theta' = - \int_{\theta}^{90^\circ} m_m B \sin \theta' \, d\theta' = -m_m B \cos \theta = \boxed{-\vec{m}_m \cdot \vec{B}}$$

* Kraft auf ein magnetisches Moment im \vec{B} -Feld

➤ Im homogenen Magnetfeld:

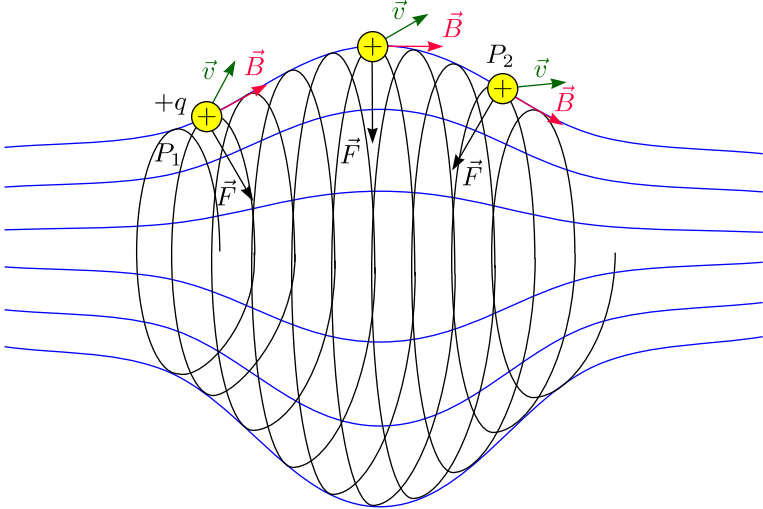
$$\boxed{\vec{F} = (\vec{m}_m \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\sigma}}$$

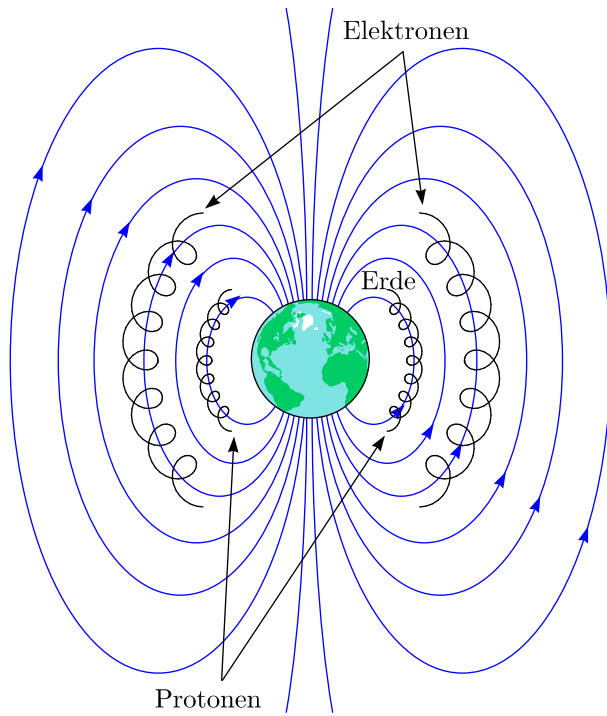
➤ Im inhomogenen Magnetfeld:



$$\vec{F} = m_{mz} \cdot \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z \quad \left(\frac{\partial B}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial B}{\partial y} \right)$$

Bei Bewegung in inhomogenen Feldern sind magnetische „Flaschen“ und „Fallen“ möglich.



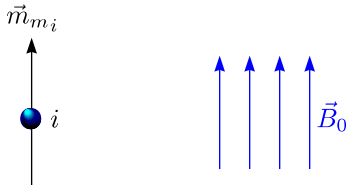


4.3.2 Erscheinungsformen des Magnetismus

1.) Paramagnetismus

Paramagnetika sind Stoffe mit Atomen, die ein permanentes \vec{m}_m besitzen (nicht abgesättigtes Hüllenelektron).

* \vec{m}_m ist im \vec{B} -Feld parallel ausgerichtet, da dann $E_m = -\vec{m}_m \vec{B}_0$ am niedrigsten ist.



Damit folgt, daß $\vec{M} \parallel \vec{B}_0$.

* Thermische Stöße verhindern zum Teil die Ausrichtung.

$$\frac{N_{\uparrow\downarrow}}{N_{\uparrow\uparrow}} = \exp\left(-\frac{\Delta E_m}{\frac{3}{2}kT}\right) = \exp\left(-\frac{4m_m B_0}{3kT}\right) \approx 1 - \frac{4m_m B_0}{3kT}$$

Beispiel:

Mit $B = 1 \text{ T}$ folgt für ΔE_m :

$$\Delta E_m = 2m_m B_0 = \boxed{2 \cdot 10^{-23} \text{ J}}$$

$\frac{3}{2}kT$ ist die thermische Energie. Nun ergibt sich bei einer Temperatur $T = 300 \text{ K}$:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{3}{2} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} \approx \boxed{6 \cdot 10^{-21} \text{ J}}$$

Damit gilt also:

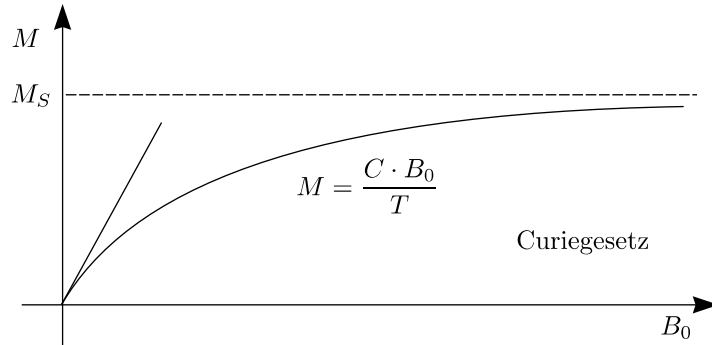
$$\frac{N_{\uparrow\downarrow}}{N_{\uparrow\uparrow}} = 1 - \frac{1}{300}$$

Für die Magnetisierung resultiert schließlich:

$$\vec{M} = \frac{1}{3} \frac{m_m B_0}{k \cdot T} \vec{M}_S$$

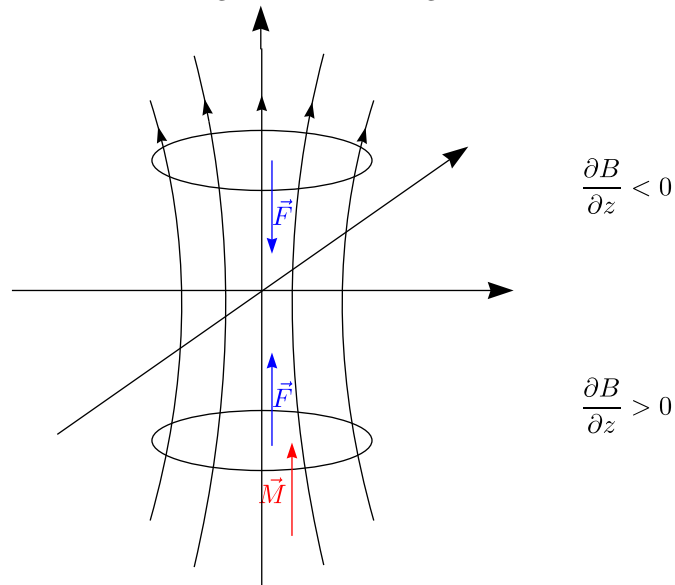
$\vec{M} \hat{=}$ Magnetisierung

$\vec{M}_S \hat{=}$ Sättigungsmagnetismus



$\chi_m = O(+10^{-5})$ bei Zimmertemperatur

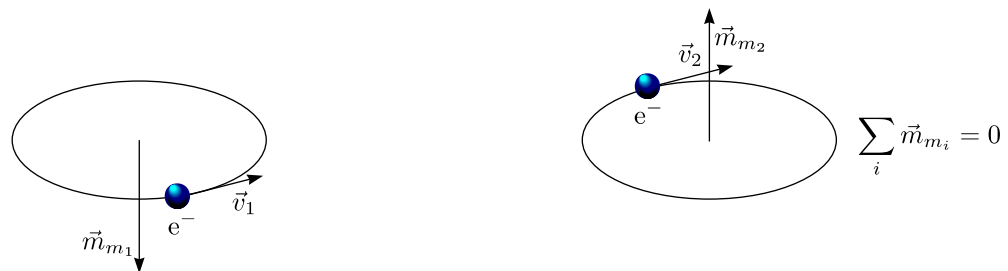
* Kraft auf Paramagneten im inhomogenen Fall:



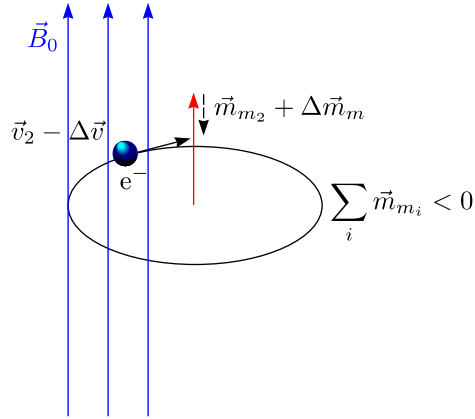
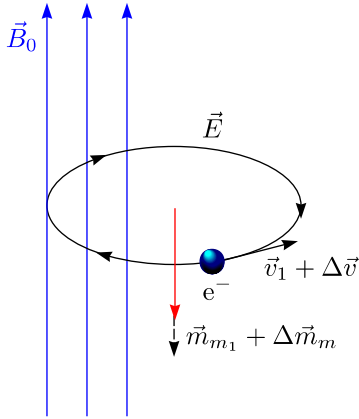
2.) Diamagnetismus:

Alle Materialien sind diamagnetisch. Beobachtbar ist der Diamagnetismus bei nicht paramagnetischen Materialien, d.h. bei Atomen, Molekülen mit abgeschlossener Hülle. Der Effekt ist, daß ein magnetisches Moment durch Anschalten eines \vec{B} -Feldes induziert wird.

a.) $B_0 = 0$



b.) B_0 eingeschaltet



Lenzsche Regel:

Die Änderung des magnetischen Flusses induziert ein elektrisches Feld, das einen Strom erzeugen will, dessen B -Feld der Flußänderung entgegenwirkt. Das FARADAYSche Induktionsgesetz lautet:

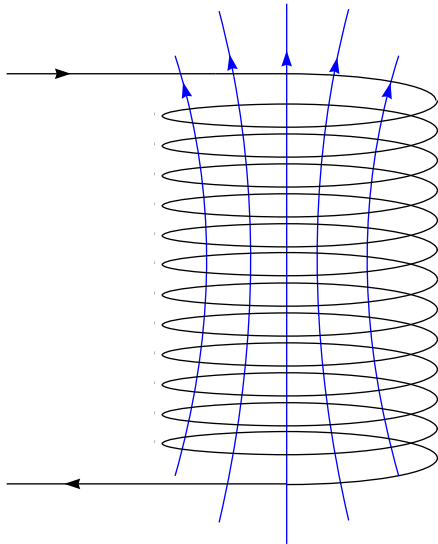
$$\oint \vec{E} \, d\vec{s} = - \frac{\partial \phi_B}{\partial t}$$

Das resultierende magnetische Moment beträgt $2 \cdot \Delta \vec{m}_m$.

$$2 \cdot \Delta \vec{m}_m \uparrow \downarrow \vec{B}_0$$

$$\Delta m_m = \frac{e^2 r^2}{4 m_e} B_0 = \boxed{10^{-28} \text{ Am}^2}$$

$$\vec{M} \uparrow \downarrow \vec{B}_0; \chi_m = O(-10^{-5})$$

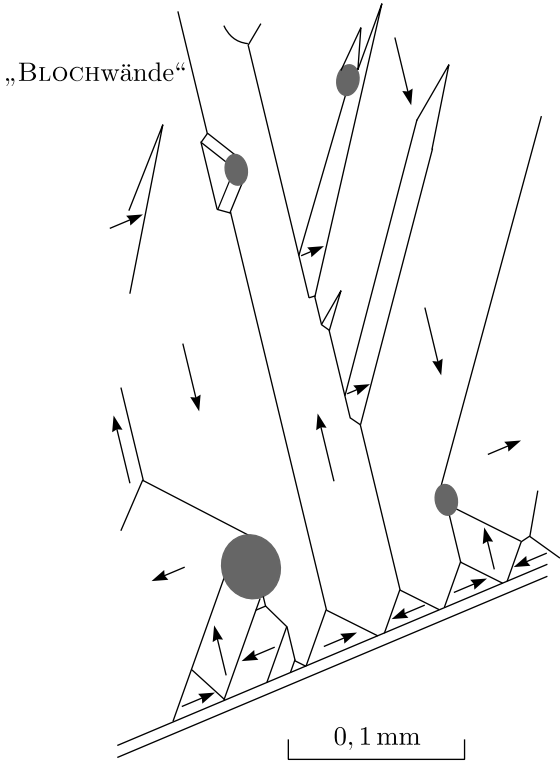
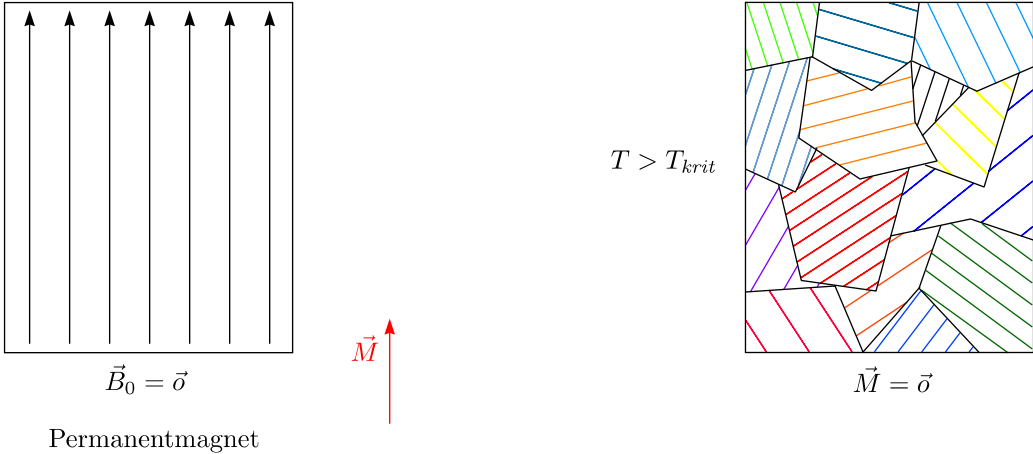
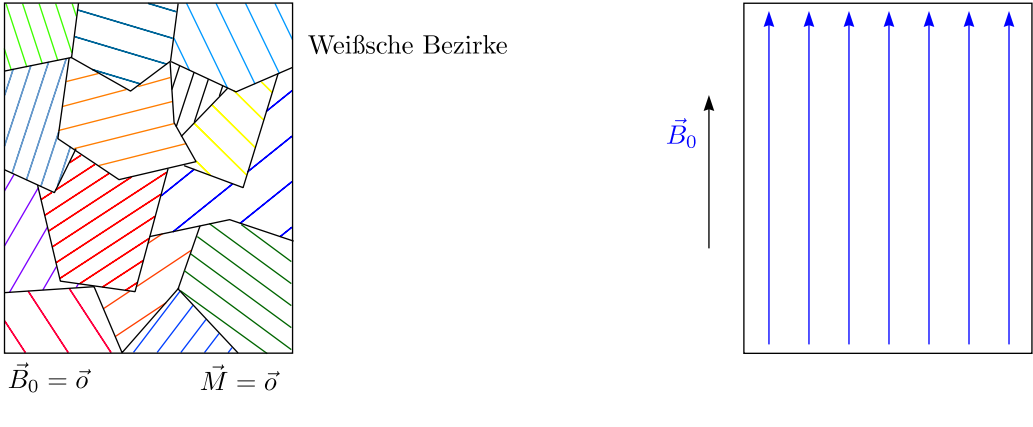


$$B = B_0 - \mu_0 \chi \cdot \vec{M}$$

Es entsteht somit kein Temperatureffekt!

3.) Ferromagnetismus:

Polykristalline Festkörper, in denen sich Atome durch Wechselwirkungen der Hüllen so ordnen, daß alle ihre magnetischen Momente \vec{m}_{m_i} in einem makroskopischen Bereich ausgerichtet sind, nennt man ferromagnetisch.

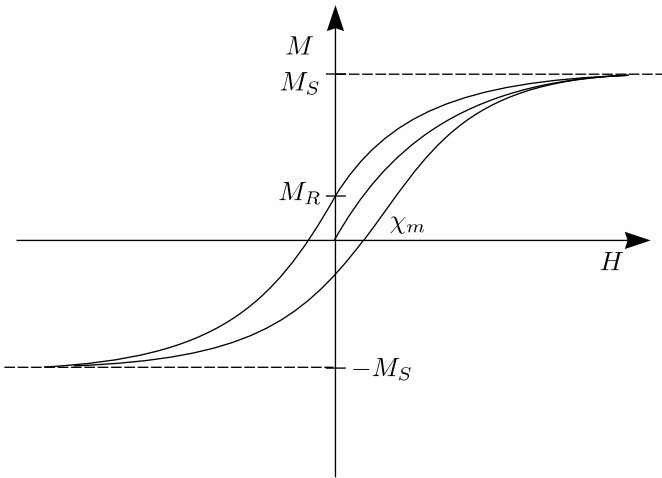


„BLOCHWÄNDE“ sind sichtbar durch ferromagnetische Kolloide (Bitter-Streifen).

Magnetisierung von Ferromagneten:

$$M = \chi_m H$$

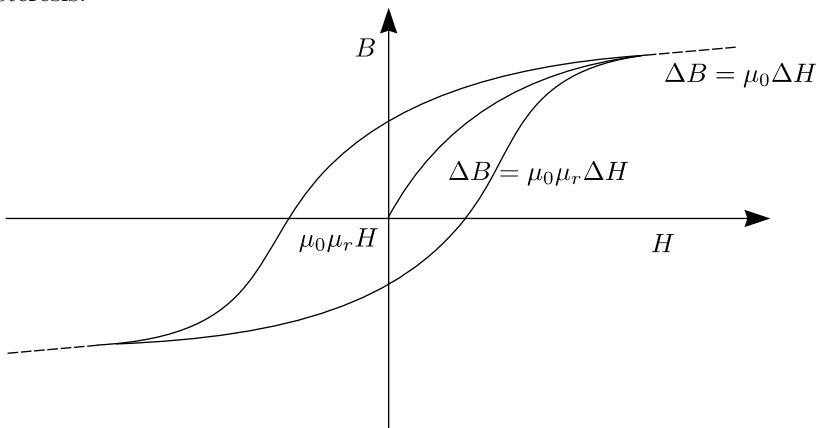
$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) H = \mu_0 \mu_R H$$



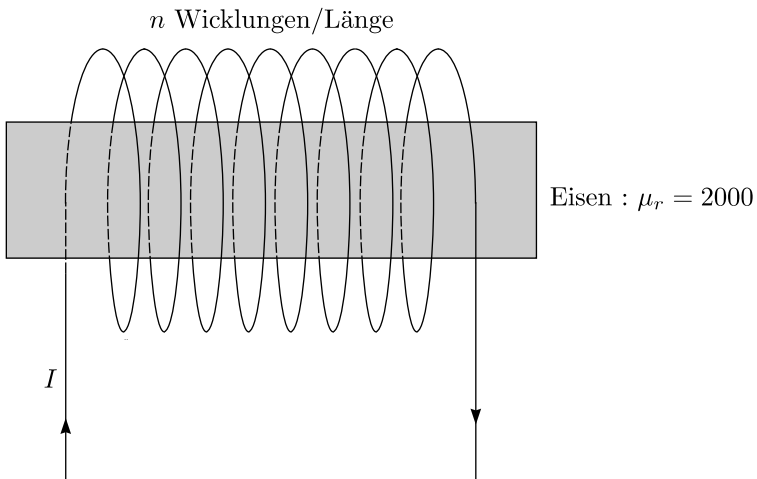
$M_S \hat{=}$ Sättigungsmagnetisierung

$M_R \hat{=}$ Remanenz

Für $T < T_C$ (Eisen: $\mu_r = 2000$, $T_C = 749^\circ\text{C}$) tritt dieses Verhalten auf. Es handelt sich um die sogenannte Hysterisis.



Beispiel:



Es sei $n = 12 \frac{1}{\text{cm}}$ und $I = 0,5 \text{ A}$. Dann gilt:

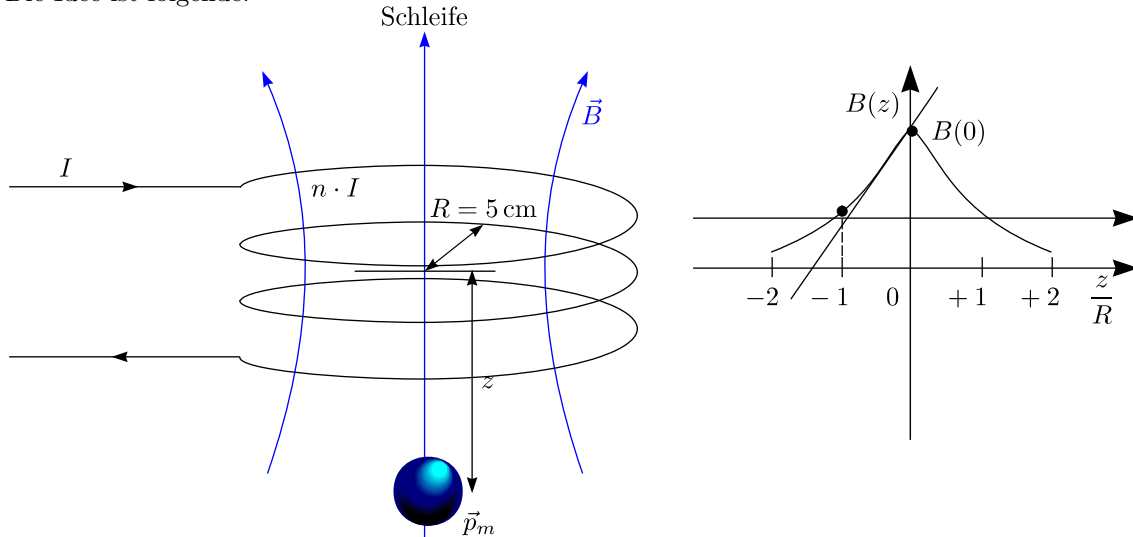
$$B_0 = \mu_0 \cdot n \cdot I = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}} \cdot 1200 \frac{1}{\text{m}} \cdot 0,5 \text{ A} = \boxed{7,5 \cdot 10^{-4} \text{ T}}$$

$$B = \mu_r \cdot B_0 = \boxed{1,5 \text{ T}}$$

$$M = (B - B_0) \cdot \frac{1}{\mu_0} = \frac{1,5 \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}} = 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{A}}{\text{m}} = \boxed{1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3}}$$

4.3.3 Stehende Kugel

Die Idee ist folgende:



$$\text{a.) } B_z = \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

b.) Magnetisierung der Eisenkugel:

$$p_m = \frac{\chi}{\mu_0} B \cdot V \quad (\chi \approx 2000)$$

c.) Kraft auf Eisenkugel:

$$\vec{F} = \left(\vec{p}_m \vec{\nabla} \right) \vec{B} = p_m \frac{\partial B}{\partial z} \vec{e}_z$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{3}{2} \cdot 2z \cdot (z^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi} = -3z \cdot (z^2 + R^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot \frac{\mu_0 n I R^2}{2}$$

Damit ergibt sich für die Kraft:

$$F = \frac{\chi}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_0 n I \pi R^2}{2\pi (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot V \cdot \left(-\frac{3z}{2} \right) \cdot \frac{\mu_0 n I R^2}{(z^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{3\mu_0 n^2 I^2 R^4 z}{4(z^2 + R^2)^4} \chi V$$

Für $z = -R$ ergibt sich:

$$F = \frac{3\mu_0 n^2 I^2 R^5 \chi V}{4 \cdot 16 \cdot R^8} = \frac{3 \cdot 1,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot n^2 \cdot 1 \text{ A}^2 \cdot 2000 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3}{64 \cdot 125 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3} = 10^{-6} \cdot n^2 \frac{\text{Ws}}{\text{m}} = 10^{-6} \cdot n^2 \text{ N}$$

Mit $\rho = 7,5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und $m = 7,5 \text{ g}$ erhalten wir für die Gewichtskraft:

$$F = mg = 7,5 \cdot 10^{-2} \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Damit die Kugel schweben soll, muß ein Kräftegleichgewicht vorliegen. Daraus erhalten wir die Anzahl der Windungen $n = \sqrt{75000} \approx 270$. Die Leiterschleife hat damit folgende Länge:

$$L \approx 2\pi R \cdot n = 6,3 \cdot 270 \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} \approx 50 \text{ m}$$

Wir nehmen an, der Draht habe einen Widerstand $R = 12 \Omega$. Um einen Strom von 1 A aufrecht zu erhalten, muß eine Spannung von $U = 12 \text{ V}$ angelegt werden. Für einen Kupferdraht gilt dann:

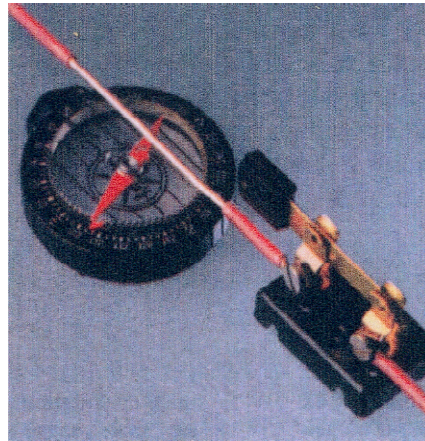
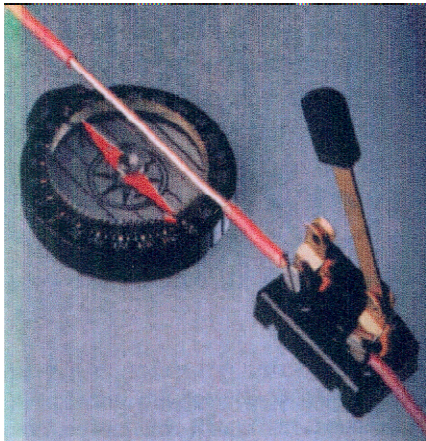
$$\varrho = R \cdot \frac{A}{L} \Rightarrow A = \frac{L \cdot \varrho}{R} = \frac{50 \text{ m} \cdot 0,017 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}{12} \approx 0,8 \text{ mm}^2$$

Die Ringfläche ist außerdem 200 mm^2 . Diese Werte sind durchaus sinnvoll.

Kapitel 5

Zeitabhängige elektrische und magnetische Felder

* OERSTED (1819):



„Ein elektrischer Strom in einem Leiter lenkt eine Kompaßnadel in der Nähe des Leiters ab.“

* AMPERE (1825):

„Elektrische Ströme sind die alleinige Quelle der magnetischen Kräfte.“

* FARADAY, HENRY (1820s):

„Elektrischer Strom in einer Leiterschleife durch Änderung eines nahen Magnetfeldes bzw. durch Änderung des Stroms in einer anderen nahen Leiterschleife.“

* MAXWELL (1864):

„Ein Magnetfeld wird durch Änderung eines elektrische Feldes hervorgerufen.“

Beschreibung von statischen elektrischen und magnetischen Phänomenen durch:

$$1.) \int_O \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$2.) \int_O \vec{B} d\vec{A} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$3.) \oint \vec{E} d\vec{s} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

$$4.) \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I \Leftrightarrow \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

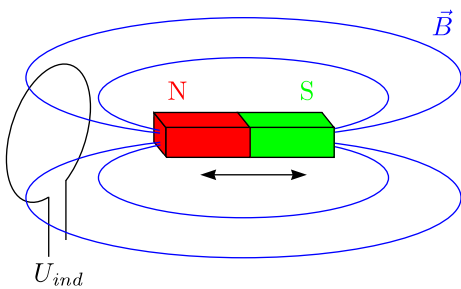
Dies sind die MAXWELLgleichungen für statische Felder.

$$\vec{F}_{EM} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

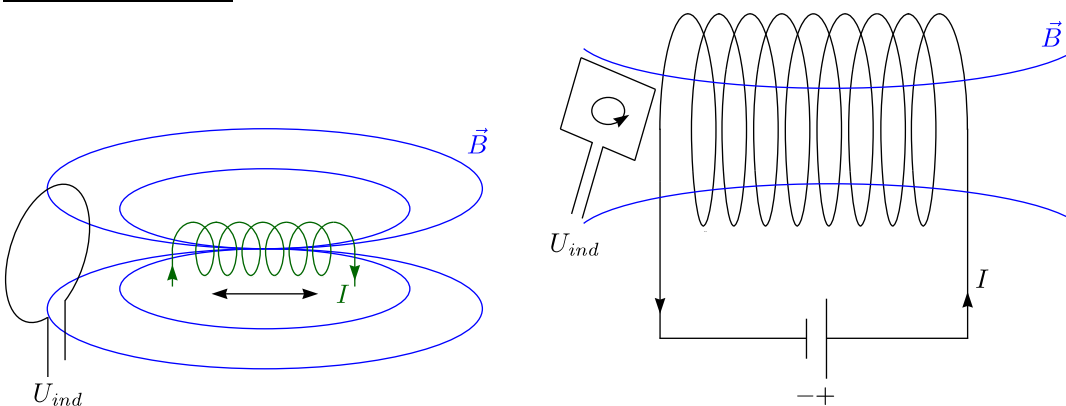
5.1 Induktion

Die Versuche von FARADAY (1831) haben gezeigt, daß die zeitliche Veränderung eines Magnetfeldes (besser: magnetischen Flusses) Ströme in einem Leiter induzieren.

* Mit Permanentmagnet:



* Mit Elektromagnet:



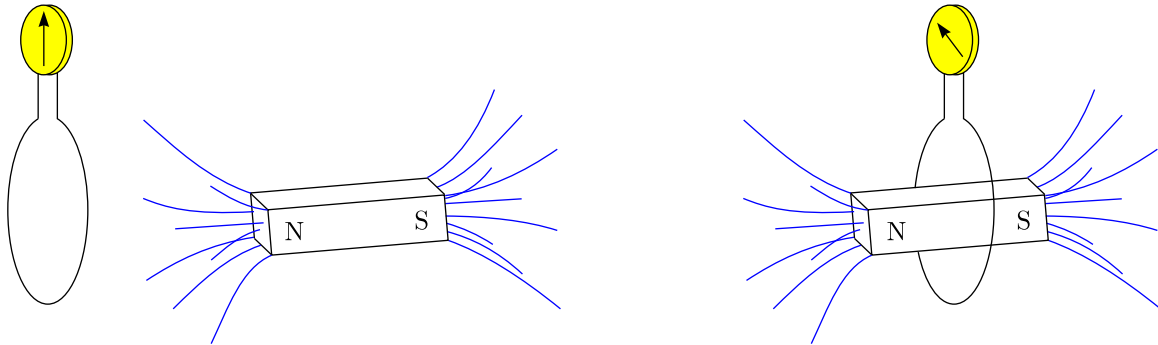
Interpretation:

Ein zeitlich veränderlicher Fluß erzeugt ein elektrisches Feld. Mit $\phi_m = \int_A \vec{B} d\vec{A}$ folgt das **Induktionsgesetz**:

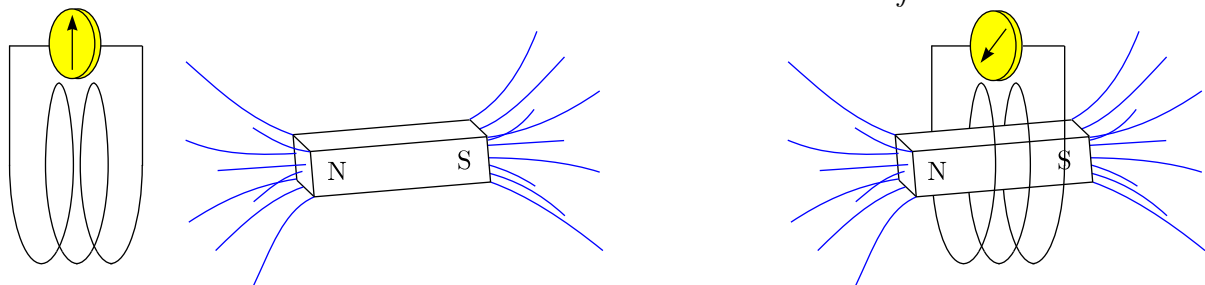
$$U_{ind} = \oint \vec{E} d\vec{s} = - \frac{d\phi_m}{dt}$$

Die LENZsche Regel:

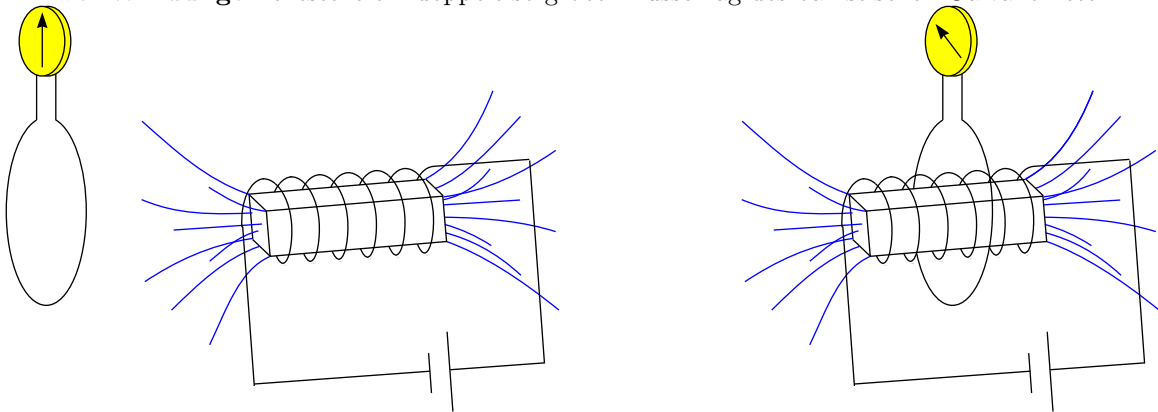
Die Induktionsspannung und der Strom, den diese hervorruft, sind stets so gerichtet, daß sie ihrer Ursache entgegenwirken.

Beispiel: Das ballistische Galvanometer

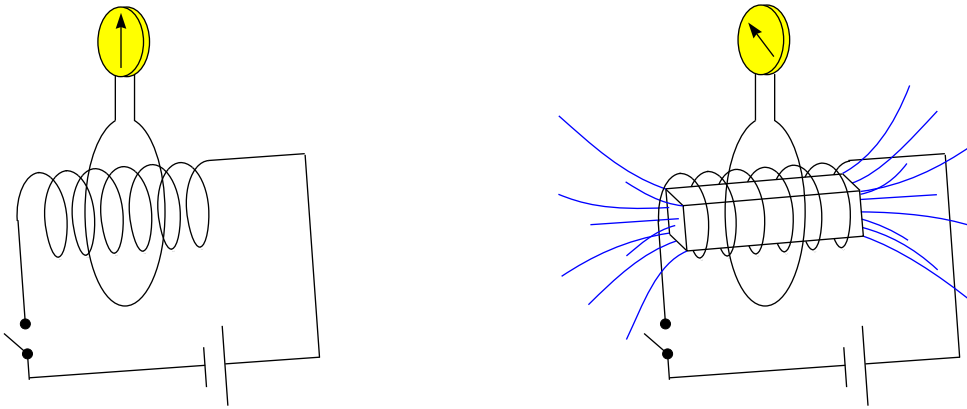
Schiebt man den Stabmagneten schnell in die **Kreisschlinge**, so zeigt das **ballistische Galvanometer** einen Induktionsstoß an. Die Bewegung ist träge und die Anzeige proportional zu $\int I dt$.



In **zwei Windungen** entsteht ein doppelt so großer Ausschlag des ballistischen Galvanometer.



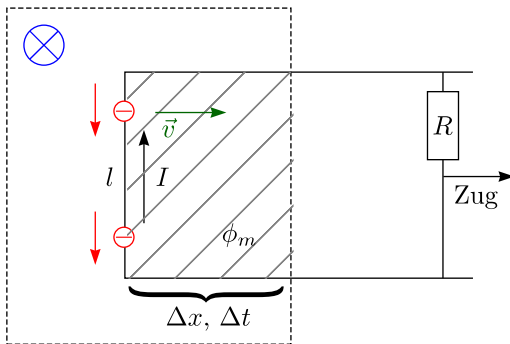
Eine stromdurchflossene **Spule** induziert beim Hineinschieben wie ein Stabmagnet



Ein **Schließen des Stromkreises** läßt das Galvanometer in gleichem Sinn ausschlagen, als wenn man die Spule in die Schlinge schöbe.

Illustration:

Bewegung einer Schleife im \vec{B} -Feld:
 \vec{B} in die Papierebene



Die Elektronen werden durch die LORENTZkraft zu einem Strom beschleunigt. Die LORENTZkraft entspricht einer effektiven elektrostatischen Kraft:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B} = -e\vec{E}$$

Der magnetische Fluß ϕ_m folgt aus der allgemeinen Beziehung:

$$\phi_m = B \cdot A = B \cdot l \cdot x$$

$$\Delta\phi_m = B \cdot \Delta A = B \cdot l \cdot \Delta x = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t$$

Damit folgt:

$$U = E \cdot l = v \cdot B \cdot l$$

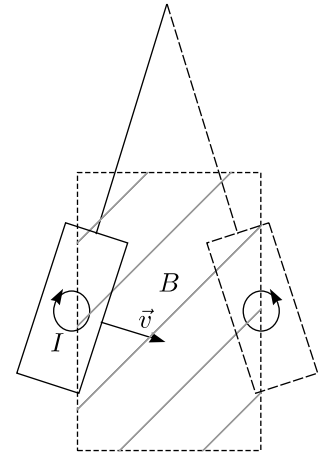
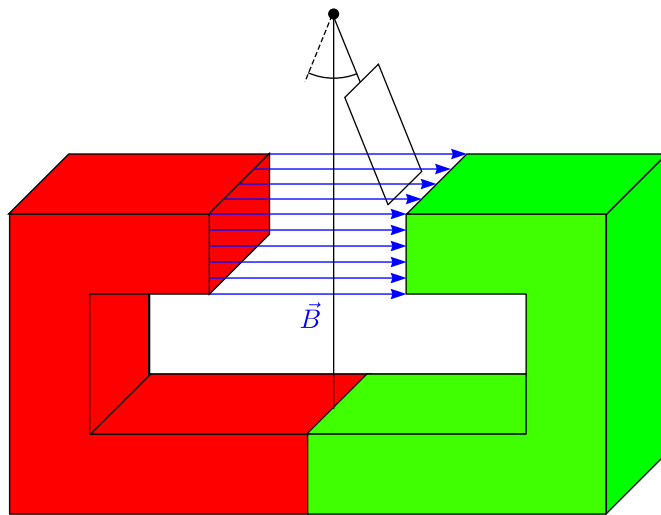
$$\frac{d\phi_m}{dt} = -Blv = -U_{ind}$$

Das Minuszeichen kommt daher, weil der Fluß abnimmt.

Demonstration, Anwendung:

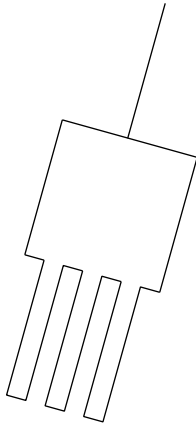
* Wirbelströme

a.) Versuch 1:

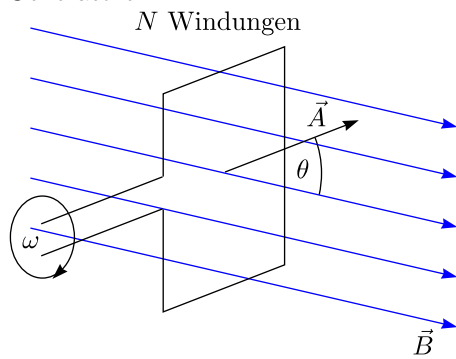


Wegen des Innenwiderstands wird I verringert, so daß \vec{v} kleiner wird.

b.) Versuch 2:



* Generatoren



$$\phi_m = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{A} = N \cdot B \cdot A \cdot \cos \theta = \boxed{N \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega t + \delta)}$$

Somit folgt für die induzierte Spannung:

$$U_{ind} = -\frac{d\phi_m}{dt} = +N \cdot B \cdot A \cdot \omega \sin(\omega t + \delta) = \boxed{U_0 \cdot \sin(\omega t + \delta)}$$

Dieses Prinzip wird bei der Wechselspannungserzeugung eingesetzt.

5.1.1 Induktionsgesetz

$$\oint_P \vec{E} \, d\vec{s} = U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

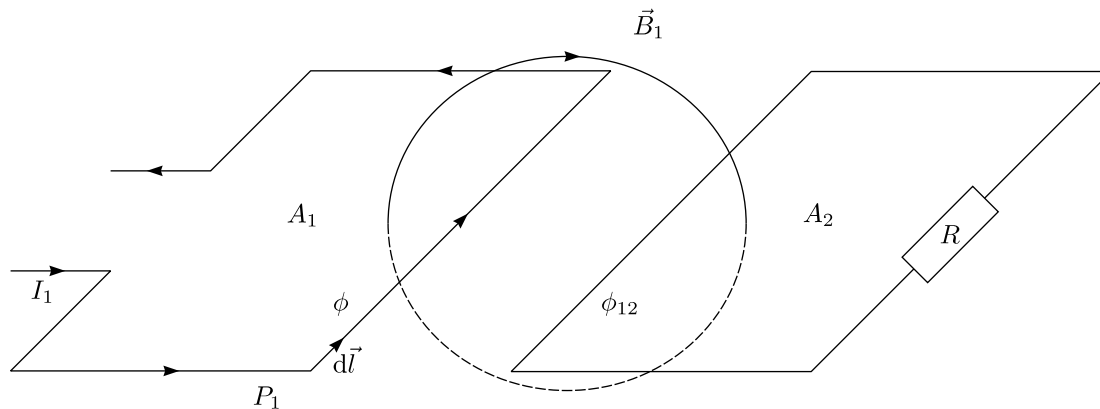
Mit dem STOKESSchen Satz ergibt sich dann:

$$\int_A \text{rot} \vec{E} \, d\vec{A} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} \, d\vec{A}$$

Damit ergibt sich:

$$\boxed{\text{rot} \vec{E} = -\frac{d}{dt} \vec{B}}$$

5.1.2 Induktivität



$\phi_{12} \hat{=} \text{Magnetischer Flu\ss von Schleife 1 durch Schleife 2}$

$$\phi_{12} = \int_{A_2} \vec{B}_1 \, d\vec{A}_2 \propto I_1 \equiv L_{12} I_1$$

Wir f\u00fchren die Induktivit\u00e4t L als Gr\u00f6\u00dfe ein. Diese hat folgende Einheit:

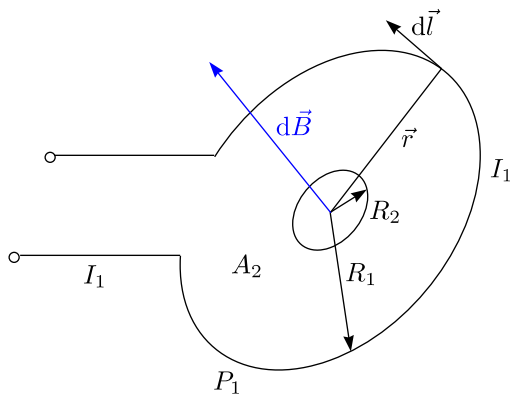
$$[L_{12}] = \frac{Vs}{A} \equiv 1 \text{ H}$$

Mit $\phi_{12} = \int_{A_2} \vec{B}_1 \, d\vec{A}_2 = \int_{A_2} \left[\int_{P_1} \mu_0 \frac{I_1 \, d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3} \right] d\vec{A}_2$ erhalten wir f\u00fcr die Induktivit\u00e4t:

$$\boxed{L_{12} = \int_{A_2} \int_{P_1} \mu_0 \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{4\pi r_{12}^3} \, d\vec{A}_2}$$

Beispiele:

a.) 2 konzentrische Leiterkreise:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \cdot \frac{2\pi R_1^2}{R_1^3}$$

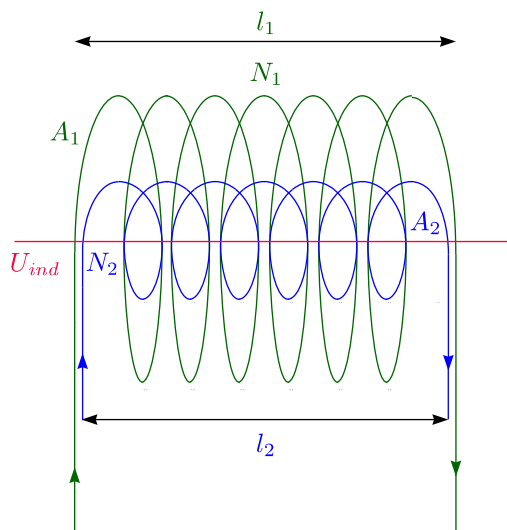
Für $R_1 \gg R_2$ gilt $r_{12} = r$. Dann erhält man für den Fluß:

$$\phi_{12} = B_z \cdot A_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{I_1}{R_1} \cdot \pi R_2^2$$

Damit gilt schließlich für die Induktivität:

$$L_{12} = \frac{\pi}{2} \mu_0 \frac{R_2^2}{R_1}$$

b.) 2 Spulen:



$$B = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} I_1$$

Für $I_1 = I_1(t)$ gilt:

$$U_{ind} = -N_2 \cdot A_2 \cdot \frac{dB}{dt} = -\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2 \frac{dI_1}{dt}$$

Daraus folgt die Induktivität:

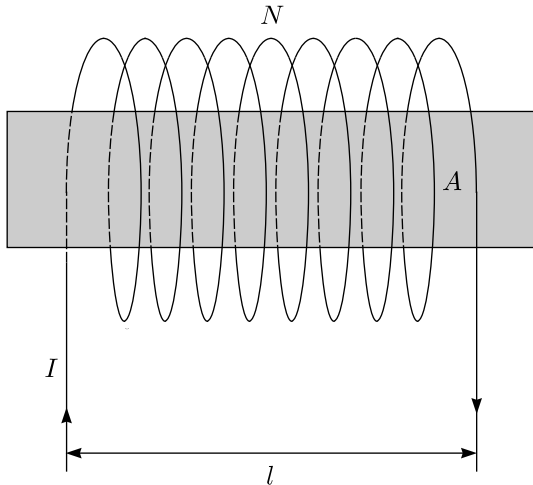
$$L_{12} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} A_2$$

Wir erhalten also folgenden sehr wichtigen Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderung des Flusses und des elektrischen Stromes:

$$\frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

c.) 1 Spule:

$$L_{12} = L = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot A = \mu_0 \cdot n^2 \cdot l \cdot A \text{ mit } n = \frac{N}{l}$$

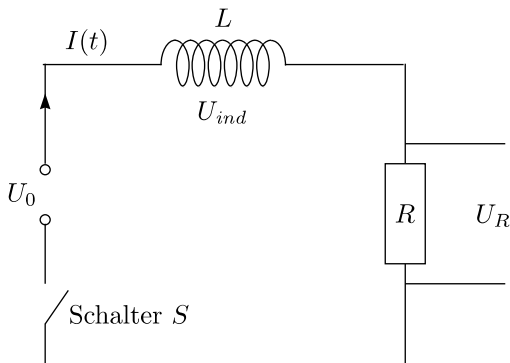


Dies ist die sogenannte Selbstinduktivität einer Spule. Allgemein gilt:

$$L_{12} = L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2}{l} \cdot A = \mu_0 \mu_r \cdot n^2 \cdot l \cdot A \text{ mit } n = \frac{N}{l}$$

Anwendungen:

Wir betrachten folgenden Stromkreis mit Widerstand und Spule:



a.) Einschaltvorgang:

$$U_{ind} = L \frac{dI}{dt}$$

Mittels der Maschenregel folgt:

$$U_0 = U_R + U_{ind}$$

Wir erhalten also folgende Differentialgleichung:

$$U_0 = R \cdot I(t) + L \frac{dI}{dt}$$

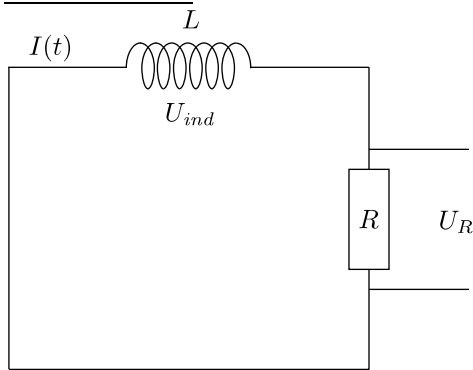
Die Lösung erhalten wir mit folgendem Ansatz:

$$I(t) = I_0 + I_1 \exp(-\alpha \cdot t)$$

Durch Einsetzen resultiert dann für den zeitlichen Verlauf des Stroms:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right) \right)$$

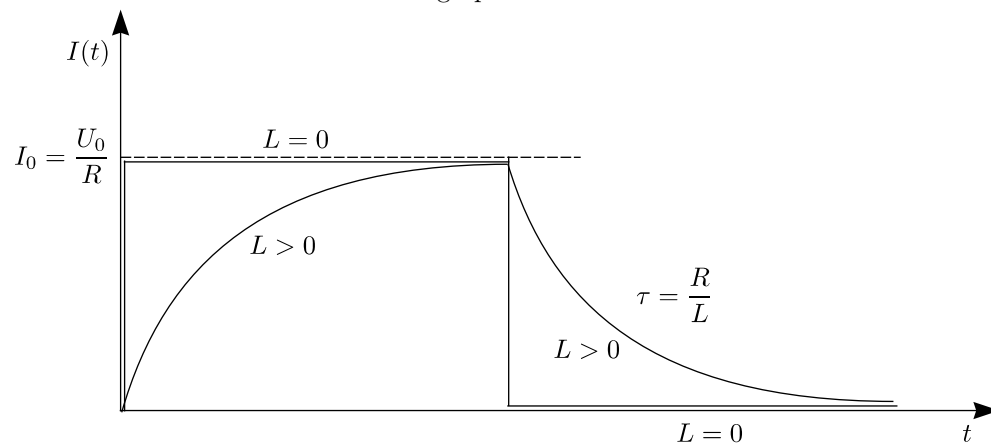
b.) Entladevorgang:



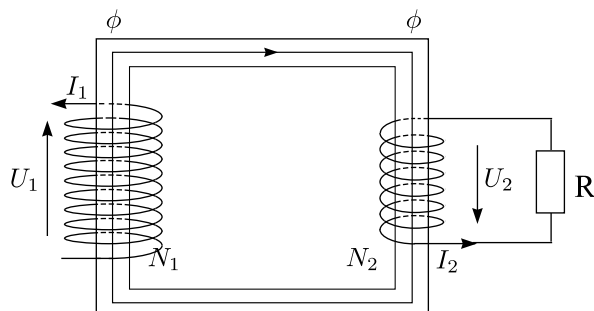
$$-L \frac{dI}{dt} = R \cdot I \text{ mit } U_0 = 0$$

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{R}{L} \cdot t\right)$$

Wir veranschaulichen das Verhalten graphisch:



5.1.3 Transformator



$$U_{ind} = -L \frac{dI_1}{dt} = -N_1 \frac{d\phi}{dt} = -U_1$$

$$U_2 = -N_2 \cdot \frac{d\phi}{dt}$$

Es ergibt sich folgender wichtiger Zusammenhang zwischen den Windungszahlen und der Spannungen:

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}}$$

Die Spannungen verhalten sich also genauso wie die Windungszahlen. (Das „-“-Zeichen bei gleichem Wicklungssinn der Spulen)

Konsequenz:

Bei Wechselspannungen herrscht eine Phasenverschiebung um π bei gegenläufiger Wicklung.

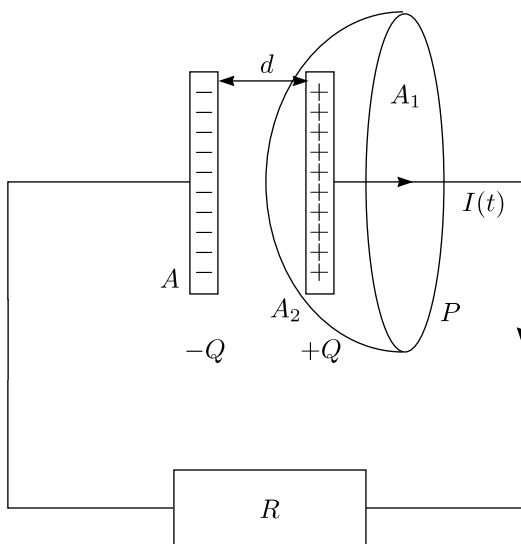
$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Damit resultiert:

$$\boxed{U_2(t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot U_0 (\sin \omega t + \pi)}$$

5.2 Maxwellscher Verschiebungsstrom

Wir betrachten das Magnetfeld bei der Entladung eines Kondensators:



A_1 und A_2 seien von P umrandet. Es gilt das Ampèresche Gesetz:

$$\int_P \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I = \mu_0 \int_A \vec{j} d\vec{A}$$

Durch die Fläche A_1 fließt ein elektrischer Strom I , womit gilt:

$$\mu_0 \int_{A_1} \vec{j} d\vec{A} = \mu_0 \cdot I$$

Der Strom durch die Fläche A_2 ist gleich Null:

$$\mu_0 \int_{A_2} \vec{j} d\vec{A} = 0$$

Es handelt sich somit um einen Widerspruch! MAXWELL löste das Problem durch Einführung eines effektiven Stromes, des sogenannten Verschiebungsstroms:

$$I_v = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} (\epsilon_0 \vec{A} \cdot \vec{E})$$

$$\boxed{\vec{j}_v = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Für die MAXWELLSche Gleichung gilt also:

$$\int \vec{B} \, d\vec{s} = \mu_0 \cdot I = \mu_0 \cdot \int \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

Mit dem STOKESSchen Satz erhalten wir:

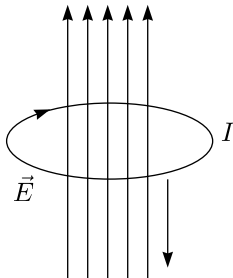
$$\int \vec{B} \, d\vec{s} = \int \text{rot } \vec{B} \, dA = \mu_0 \cdot \int \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{A}$$

Mit $\mu_0 \cdot \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ folgt:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \boxed{\mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Da $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} > 0$, gilt schließlich:

$$\boxed{\text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}}$$



Wir bilden die Divergenz der obigen Gleichung.

$$\Rightarrow \text{div}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{div } \vec{j} + \frac{1}{c^2} \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Da die Divergenz einer Rotation gleich Null ist, ergibt sich:

$$0 = \text{div } \vec{j} + \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Mit $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho$ erhalten wir schließlich die Kontinuitätsgleichung:

$$\boxed{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \rho = 0}$$

5.3 Energie des elektrischen und magnetischen Feldes

a.) Erinnerung: Aufladung eines Kondensators

$$dW = dQ \cdot U = dQ \cdot \frac{Q}{C}$$

$$W = \frac{1}{C} \int Q \, dQ = \boxed{\frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}} = \boxed{\frac{1}{2} U^2 C}$$

Beispiel: Fall des Plattenkondensators

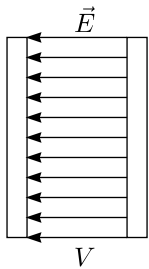
$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$$

$$U = E \cdot d$$

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot \underbrace{A \cdot d}_V$$

Für die Energiedichte des elektrischen Feldes erhalten wir:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$



b.) \vec{B} -Feld:

Betrachten wir die Entladung einer Spule:

$$W = \int_0^{\infty} \underbrace{I \cdot U}_{\text{Leistung}} dt = \int_0^{\infty} I^2 \cdot R dt = \int_0^{\infty} R \cdot I_0^2 \exp\left(-\frac{2R}{L}t\right) dt$$

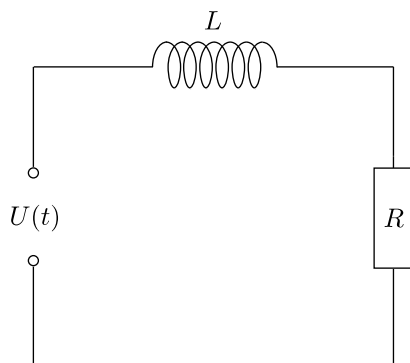
$$W = \frac{1}{2} L I_0^2$$

Für die Spule erhalten wir mit der Induktivität L und $B = \mu_0 \cdot I_0 \cdot n$:

$$W = \frac{1}{2} \underbrace{\mu_0 n^2 \cdot A \cdot l}_L \cdot \underbrace{\left(\frac{B}{\mu_0 n}\right)^2}_{I_0^2} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \cdot V$$

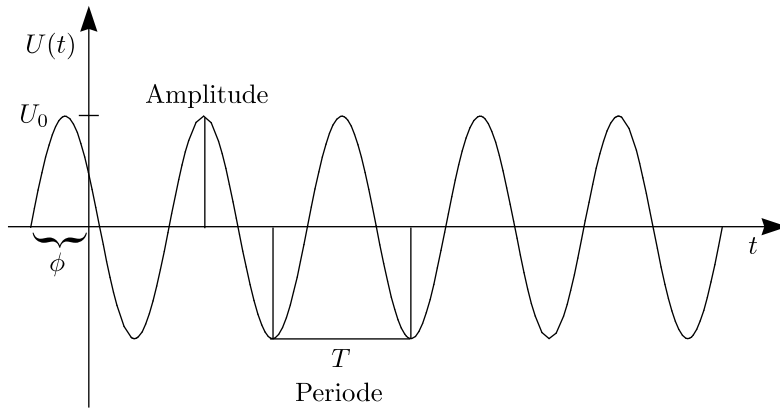
Somit folgt auch hier für die Energiedichte:

$$w = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$



5.4 Wechselstrom und Schaltkreise

1.) Allgemeine Beschreibung:



Üblicherweise beschreibt man die Spannungsverläufe durch Sinus- und Kosinusfunktionen.

$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \phi) \text{ mit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

* Mittelwert:

$$\langle U \rangle \equiv \frac{\int_0^T U(t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{\int_0^T U(t) dt}{T}$$

$$\langle U \rangle = 0 \text{ für } U = U_0 \sin(\omega t + \phi)$$

* Effektivwert:

$$U_{eff}^2 \equiv \frac{\int_0^T U^2(t) dt}{T} = \frac{U_0^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t + \phi) dt = \frac{U_0^2}{2}$$

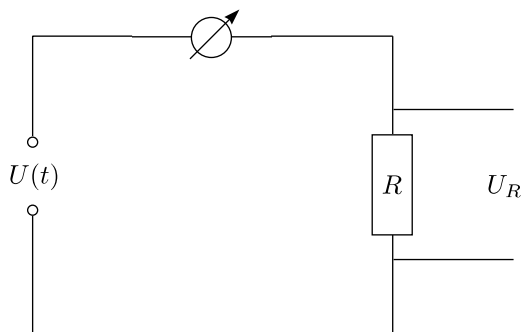
$$\hat{=} U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{=} I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

* Hausstrom:

$$U_{eff} = 230 \text{ V}, U_0 = 325 \text{ V}$$

2.) Wechselspannung am OHMSchen Widerstand:

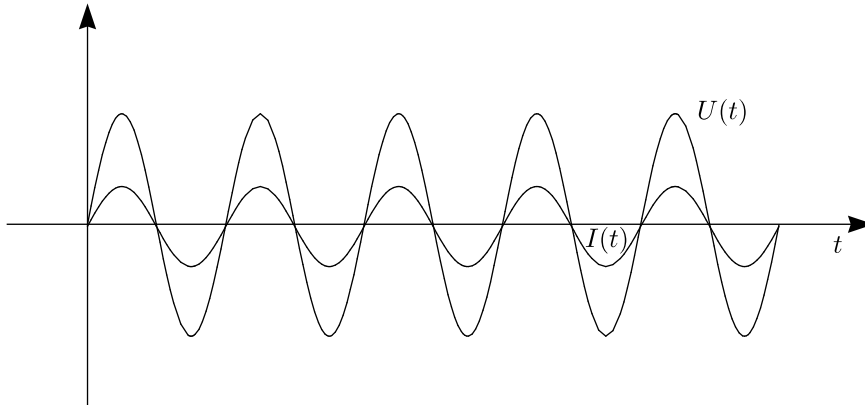


Mit den KIRCHHOFFSchen Gesetzen erhält man:

$$-U(t) + U_R = 0$$

Mit $U_0 \sin \omega t = U_R = I(t) \cdot R$ erhält man für den zeitlichen Verlauf des Stroms:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \sin \omega t \equiv \boxed{I_0 \sin \omega t}$$

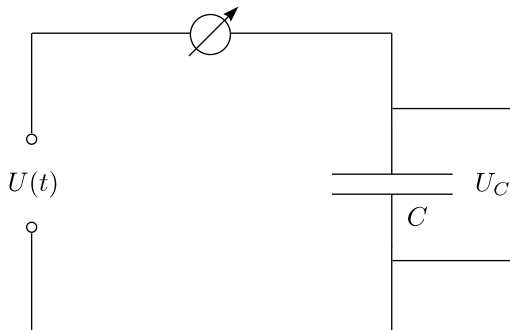


Leistung am Widerstand:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cdot I_0 \cdot \sin^2(\omega t)$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t) \cdot I(t) dt = \boxed{\frac{U_0 I_0}{2}} = \boxed{U_{eff} \cdot I_{eff}}$$

3.) **Wechselspannung am Kondensator:**



$$U_C = U(t) = U_0 \sin \omega t$$

Für die Ladung des Kondensators gilt:

$$\boxed{Q(t) = C \cdot U_C = C \cdot U_0 \sin \omega t}$$

Damit folgt für den zeitlichen Verlauf des Stroms:

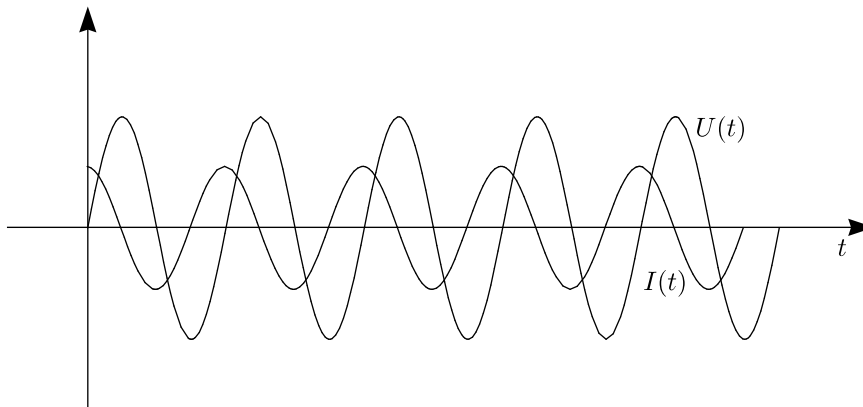
$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = \omega \cdot C \cdot U_0 \cos \omega t = \boxed{\underbrace{\omega \cdot C \cdot U_0}_{I_0} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)}$$

Für den kapazitiven Widerstand erhält man:

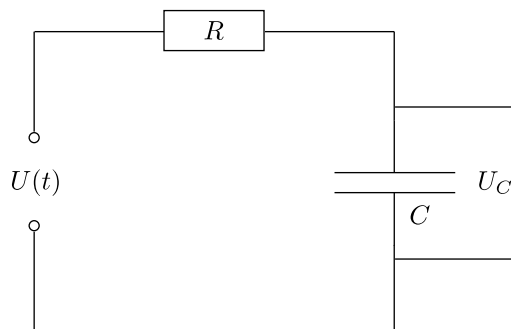
$$R_C = \frac{U_0}{I_0} = \boxed{\frac{1}{\omega C}}$$

Dieser Ausdruck ist die sogenannte Impedanz.

- * Keine absorbierte Leistung
- * Phasenverschiebung



4.) Kondensator und OHMScher Widerstand:



$$-U(t) + U_R + U_C = 0$$

$$U(t) = I(t) \cdot R + \frac{Q(t)}{C}$$

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dI}{dt} \cdot R + \frac{I(t)}{C}$$

Dies ist eine Differentialgleichung, die wir mit folgendem Ansatz lösen:

$$U(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi)$$

Wir erhalten:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}} \quad \text{mit} \quad \tan \phi = \frac{1}{\omega C R}$$

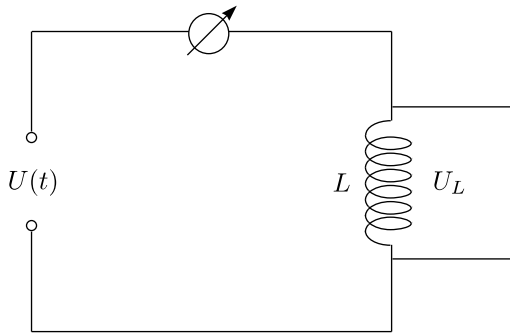
Für die Impedanz resultiert:

$$R_L = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}$$

Für $R = 0$ erhält man den reinen kapazitiven Widerstand des Kondensators mit der Phasenverschiebung ϕ :

$$R_c = \frac{1}{\omega C} \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

5.) Wechselspannung an Spule:



$$U(t) = L \frac{dI}{dt}$$

$$U_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt}$$

$$I(t) = \int \frac{U_0}{L} \sin \omega t dt = \boxed{\frac{U_0}{\omega \cdot L} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)}$$

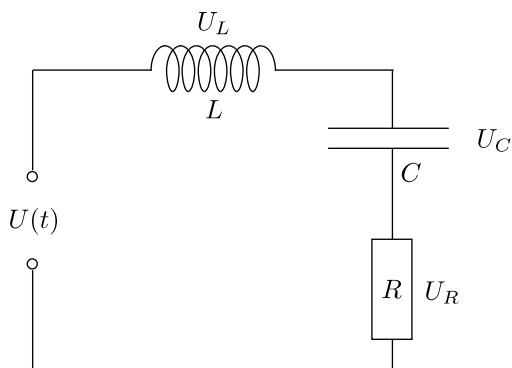
Für den induktiven Widerstand gilt:

$$\boxed{R_L = \omega \cdot L}$$

6.) Spule und Widerstand:

$$\boxed{R_L = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \text{ mit } \boxed{\tan \phi = -\frac{\omega L}{R}}$$

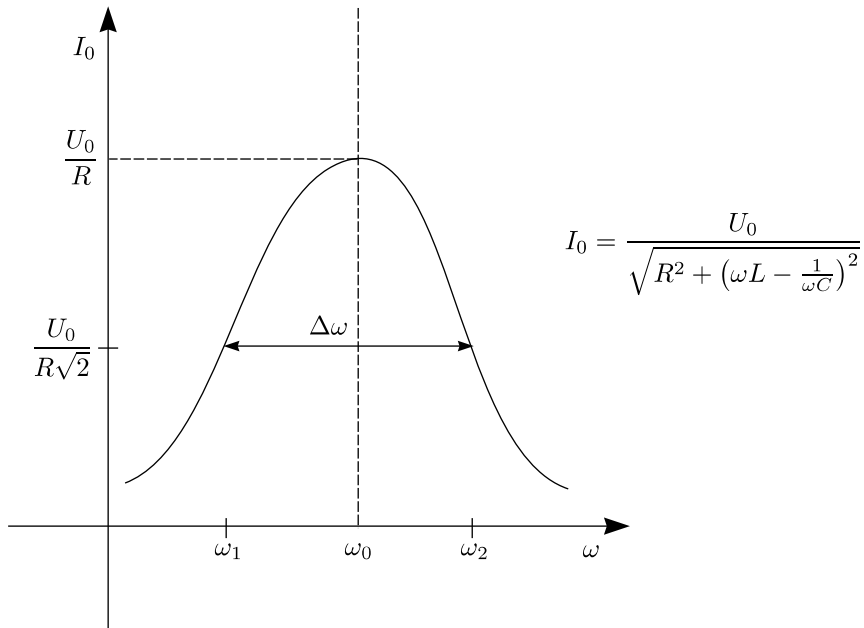
7.) Serienschwingkreis:



$$\frac{dU}{dt} = L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \cdot \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}$$

$$\boxed{R_z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}$$

$$\boxed{\tan \phi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}}$$

Resonanz:

Das Maximum befindet sich bei $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, das heißt bei $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Also berechnet sich die Resonanzfrequenz nach:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Man nennt diese Beziehung auch **Thomsonsche Formel**.

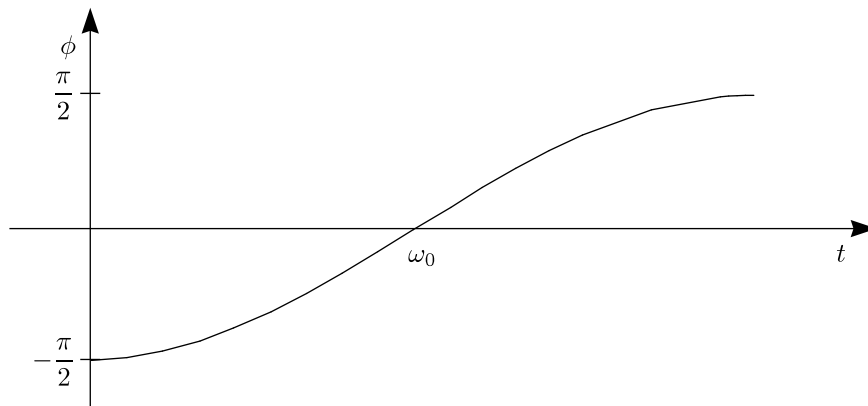
* Breite der Resonanzkurve

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

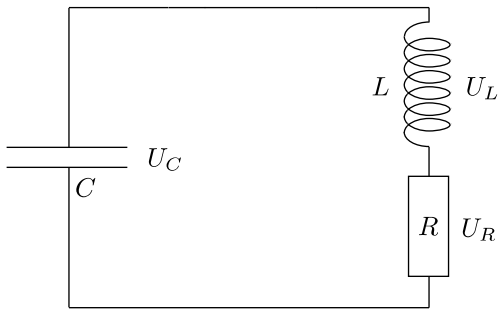
$$I_{\text{eff}} = I(\omega_1) = I(\omega_2) = \frac{U_0}{\sqrt{2}R}$$

* Kreisgüte

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \mapsto \infty \text{ für } R \mapsto 0$$



8.) Entladung eines Kondensators über Spule und OHMSchen Widerstand:



$$\frac{Q}{C} + R \cdot I + L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\frac{I}{C} + R \cdot \dot{I} + L \cdot \ddot{I} = 0$$

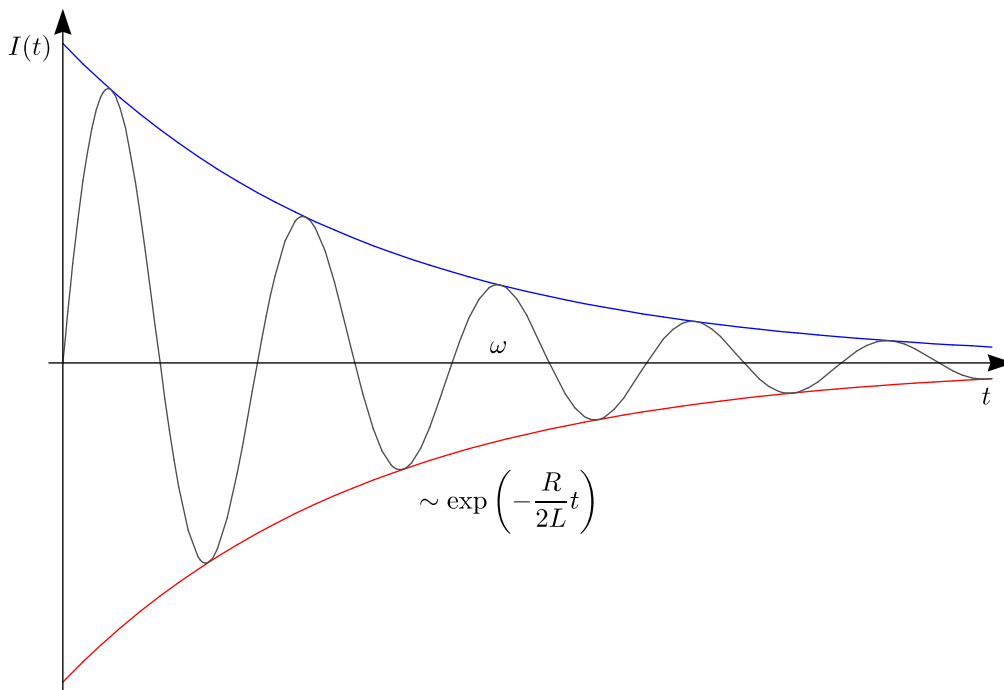
Wir verwenden als Ansatz eine exponentiell abfallende Kosinusfunktion:

$$I(t) = I_0 \exp(-\alpha t) \cos \omega t$$

Damit erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung:

$$I(t) = I_0 \underbrace{\exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)}_{\text{Dämpfung}} \cos \underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}t}_{\omega}$$

Graphisch sieht diese Funktion folgendermaßen aus:



Kapitel 6

Elektromagnetische Wellen

6.1 Die Maxwellgleichungen und ihre Lösung im Vakuum

Im Vakuum gilt natürlich $\rho = 0$ und $\vec{j} = \vec{0}$. Wir betrachten als Ausgangspunkt das System der MAXWELL-Gleichungen:

$$1.) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$2.) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$3.) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$4.) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

Wir bilden nun jeweils die Rotation der dritten Gleichung:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) + \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

Nun folgt durch Auflösen des doppelten Kreuzproduktes und mit der ersten und vierten MAXWELL-Gleichung:

$$\underbrace{\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}_0 - \vec{\nabla}^2 \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = 0$$

Somit gilt:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

Damit ergibt sich also die Wellengleichung für das elektrische Feld \vec{E} :

$$\boxed{\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}}$$

Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum berechnet sich folgendermaßen:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

In Medien folgt mit der entsprechenden Dielektrizitätszahl ε_r und der Permeabilitätszahl μ_r :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}}$$

Im Vakuum gilt also $v = c$. Die Wellengleichung des magnetischen Feldes \vec{B} folgt analog:

$$\boxed{\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B}}$$

6.1.1 Spezielle Lösung: Ebene Welle in x -Richtung

Wir man durch Einsetzen in die Wellengleichungen überprüfen kann, stellt folgende Funktion für $B_x = B_y = E_x = E_z = 0$ eine Lösung dar:

$$B_z(x, t) = E_0 \frac{k}{\omega} \sin(kx - \omega t) = \frac{1}{c} E_y(x, t)$$

Das \vec{B} -Feld ergibt sich unter anderem aus dem \vec{E} -Feld mittels der MAXWELL-Gleichungen:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial_y E_z - \partial_z E_y \\ \partial_z E_x - \partial_x E_z \\ \partial_x E_y - \partial_y E_x \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_x E_y \end{pmatrix} \text{ mit } \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}$$

Daraus ergibt sich weiter:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$B_z(x, t) = -\int \frac{\partial E_y}{\partial x} dt = -E_0 \cdot k \int \cos(kx - \omega t) dt = \frac{E_0 k}{\omega} \sin(kx - \omega t) = \frac{k}{\omega} E_y(x, t)$$

Die zugehörige Dispersionsrelation lautet:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$$

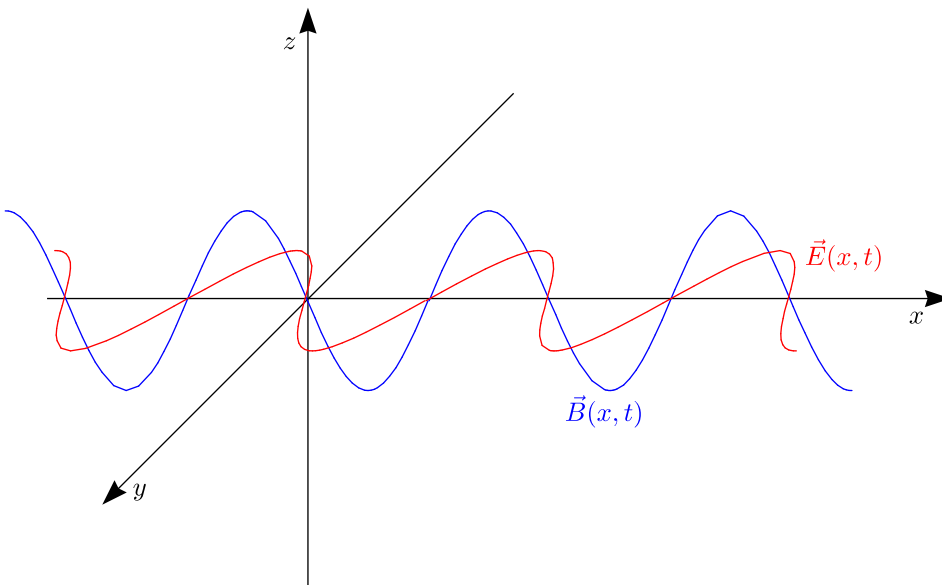
Damit folgt also:

$$\vec{B}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{c} E_0 \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}(r, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren des elektrischen und magnetischen Feldes stehen somit senkrecht aufeinander:

$$\vec{B} \cdot \vec{E} = 0$$



$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \left(\frac{k}{\omega} \times \vec{E} \right) = \frac{E^2}{\omega} \vec{k}$$

Der Vektor senkrecht auf \vec{E} und \vec{B} zeigt somit in Richtung des Ausbreitungsvektors \vec{k} der elektromagnetischen Welle. Speziell gilt für unser Beispiel:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c} E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemein gilt für freie elektromagnetische Wellen:

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \times \vec{E}; \vec{E} \perp \vec{B} \text{ und } \vec{E}, \vec{B} \perp \vec{k}$$

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \vec{e}_y \sin(kx - \omega t) = E_0 \vec{e}_y \sin k(x - vt)$$

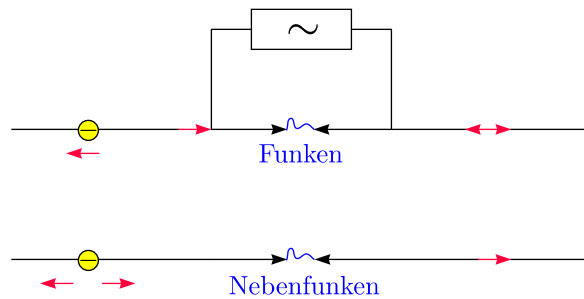
$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \sin(kx - \omega t) = +\frac{k^2}{\omega^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$\frac{k}{\omega} = \frac{1}{v} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = c$$

Demonstration: Experiment von Heinrich Hertz:



6.1.2 Energie, Intensität einer elektromagnetischen Welle

* Energiedichte des elektrischen Feldes:

$$w_{el} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

* Energiedichte des magnetischen Feldes:

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Man kann zeigen, daß die beiden Energiedichten gleich groß sind:

$$w_{mag} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E^2}{c^2} \right) = \frac{1}{2\mu_0 c^2} E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = w_{el}$$

Gesamtenergie:

Diese folgt durch Addition der beiden Energiedichten:

$$w = w_{el} + w_{mag} = \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|}{\mu_0 c}$$

Intensität einer elektromagnetischen Welle:

Wir definieren:

$$I \triangleq \frac{\text{Mittlere Leistung}}{\text{Flächeneinheit}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}}$$

Mit der zuvor berechneten Energiedichte w erhalten wir:

$$I_0 = w \cdot c = \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|}{\mu_0}$$

Für die zeitlich gemittelte Intensität folgt:

$$\langle I \rangle \equiv I = \langle w \rangle \cdot c$$

Beispiel:

Wir berechnen diese Größen speziell für folgende Felder:

$$\vec{E}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \sin(kx - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}(x, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{c} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

Für die Energiedichte erhalten wir:

$$w = \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|}{\mu_0 c} = \frac{E_0 \cdot B_0}{\mu_0 c} \sin^2(kx - \omega t)$$

Wir wollen diese Größe zeitlich mitteln. Dazu mitteln wir die quadratische Sinusfunktion über volle Perioden hinweg, womit folgt:

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(kx - \omega t) dt}{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{\pi}{\omega}}{\frac{\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}$$

Der Mittelungsfaktor ist also gleich $\frac{1}{2}$. Damit gilt also:

$$\langle w \rangle = \frac{E_0 B_0}{\mu_0 c} \cdot \frac{1}{2} = \frac{E_{eff} \cdot B_{eff}}{\mu_0 c} \text{ mit } E_{eff} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \text{ und } B_{eff} = \frac{B_0}{\sqrt{2}}$$

Für die zeitlich gemittelte Intensität folgt:

$$I = \langle w \rangle \cdot c = \frac{E_{eff} \cdot B_{eff}}{\mu_0}$$

Außerdem definieren wir den sogenannten Poynting-Vektor (Intensitätsvektor):

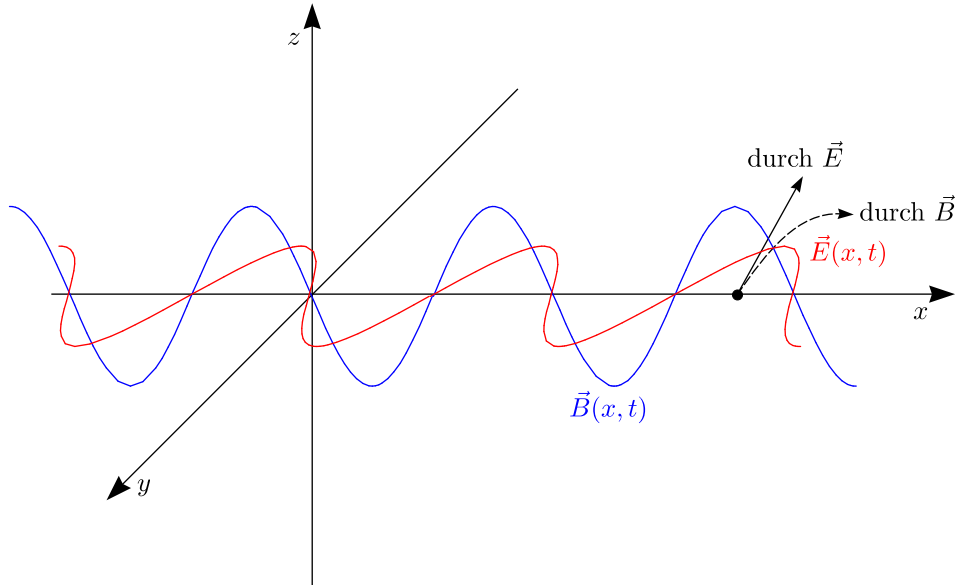
$$\boxed{\vec{S} \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}}$$

Speziell für unser Beispiel gilt:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Poynting-Vektor zeigt also die Richtung des Energieflusses an, während der Betrag dessen Größe angibt.

6.1.3 Impuls von elektromagnetischen Wellen

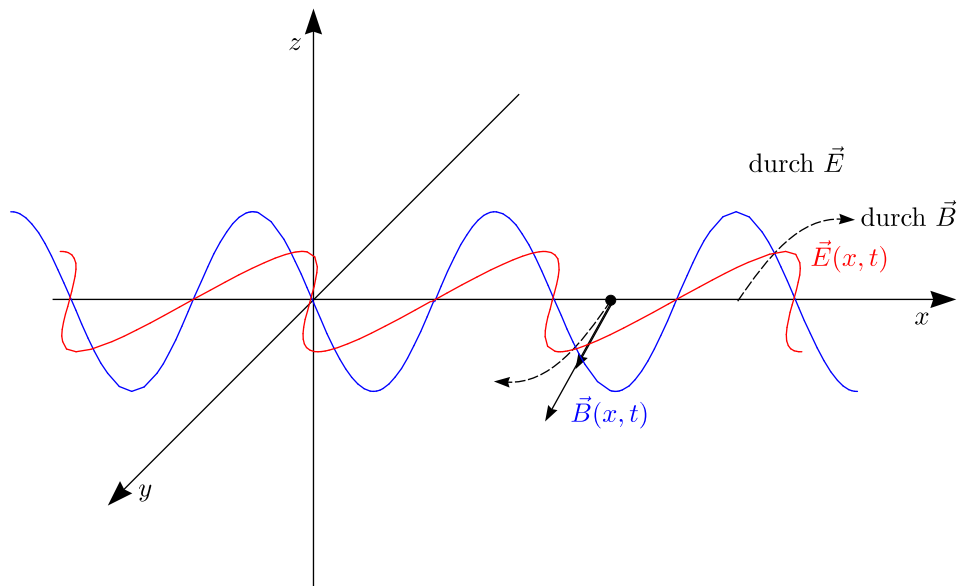


Für die Kraft des elektrischen Feldes auf die Ladung q ergibt sich:

$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}(x, t) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Damit folgt für die Geschwindigkeit der Ladung:

$$\vec{v} = v_y \cdot \vec{e}_y = \frac{q \cdot \vec{E}}{m} t = \frac{q|\vec{E}|}{m} t \vec{e}_y$$



$$v_y = \frac{q \cdot |\vec{E}|}{m} \cdot t$$

Darüber hinaus resultiert für die Kraft des magnetischen Feldes auf die Ladung q :

$$\vec{F}_b = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}(x, t)$$

$$F_x = \underbrace{q \cdot v_y \cdot |\vec{B}|}_{\text{immer } > 0} = q^2 \cdot \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|}{m} \cdot t$$

Mit dem zweiten NEWTONSchen Axiom $\frac{dp}{dt} = \vec{F}$ folgt natürlich durch Integration:

$$\vec{p} = \int_0^t \vec{F} dt$$

Hier gilt nun:

$$p_x = \int_0^t F_x dt' = \int_0^t \frac{q^2 |\vec{E}| \cdot |\vec{B}|}{m} t' dt' = \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{|\vec{E}| \cdot |\vec{B}|}{m} t^2 = \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{E^2}{mc} \cdot t^2$$

Vergleiche mit Energie der Ladung:

$$v_x \ll v_y : E_{kin} \approx \frac{1}{2} m v_y^2 = \frac{1}{2} m \cdot \frac{e^2 E^2}{m^2} t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2 E^2}{m} \cdot t^2 \equiv W$$

$$\boxed{W = p \cdot c}$$

Dabei handelt es sich also um den Zusammenhang zwischen Impuls und Energie des elektromagnetischen Feldes. Infolge des Impulses der elektromagnetischen Welle ergibt sich folgender Strahlungsdruck P_S :

$$P_S = \frac{I}{c} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0 c} = \frac{E_{Eff} \cdot B_{Eff}}{\mu_0 c}$$

Motivation:

$$\text{Intensität} = \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} = \frac{\text{Impuls} \cdot c}{\text{Zeit} \cdot \text{Fläche}} = \text{Kraft} \cdot \frac{c}{\text{Fläche}} = \text{Druck} \cdot c$$

Fläche:

* Elektromagnetische Welle wird absorbiert

$$P = \frac{W}{c}$$

Damit ergibt sich folgender Strahlungsdruck:

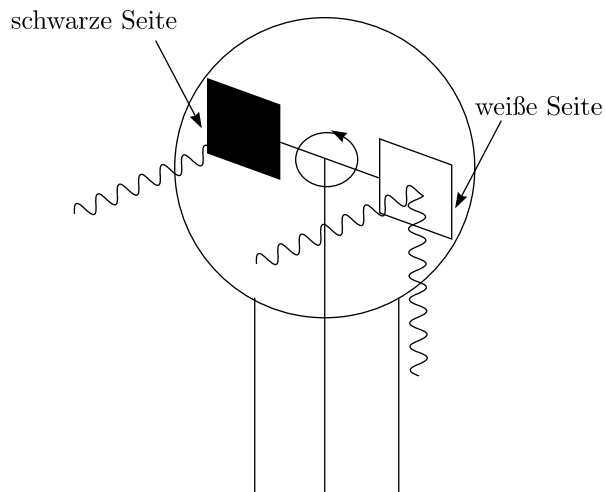
$$\boxed{P_S = \frac{I}{c}}$$

* Elektromagnetische Welle wird reflektiert

$$P = 2 \cdot \frac{W}{c}$$

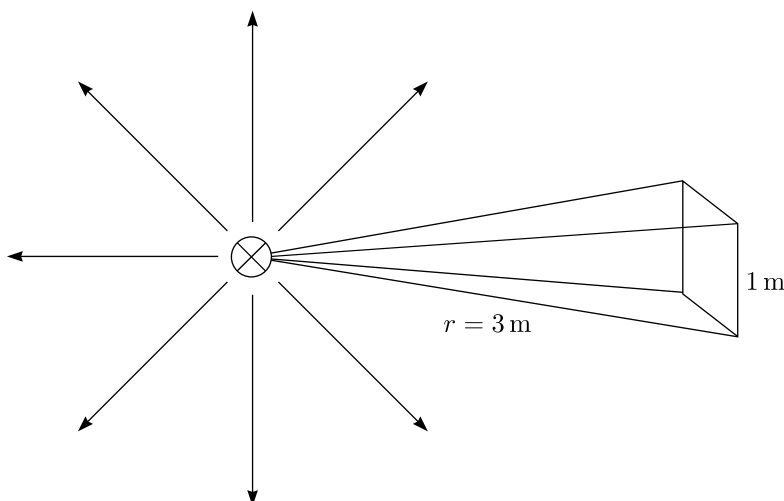
$$\boxed{P_S = 2 \cdot \frac{I}{c}}$$

Demonstration: Lichtmühle



Die Lichtmühle dreht sich allerdings nur dann in die eingezeichnete Richtung, wenn im Gefäß ein perfektes Vakuum herrscht.

Beispiel: Lichtdruck einer Glühlampe



Die Intensität ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r . Für $r = 3\text{ m}$ resultiert:

$$I = \frac{P_{tot}}{4\pi r^2} = \frac{P_{tot}}{4\pi \cdot (3\text{ m})^2}$$

Mit der Strahlungsleistung $P_{tot} = 50\text{ W}$ erhalten wir:

$$I = \frac{50\text{ W}}{4\pi \cdot (3\text{ m})^2} = \boxed{0,44 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}}$$

$$P_S = \frac{I}{c} = \frac{0,44 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^3}}{\text{m}^2 \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = \boxed{1,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}}$$

Vergleiche mit Atmosphärendruck:

$$p_{atm} \approx 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Außerdem berechnet sich das Magnetfeld in $r = 3\text{ m}$ Entfernung:

$$B_0 = \sqrt{2\mu_0 P_S} = \sqrt{2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \cdot 1,5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}} = \boxed{6 \cdot 10^{-8} \text{ T}}$$

Damit gilt für das elektrische Feld in $r = 3 \text{ m}$ Entfernung:

$$E_0 = c \cdot B_0 = \boxed{18 \frac{\text{V}}{\text{m}}}$$

Sonnendruck auf Erde:

Durch den Sonnendruck wirkt auf die Erde folgende Kraft:

$$F_S = P_S \cdot A = 1,4 \cdot 10^3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot (6,4 \cdot 10^6 \text{ m})^2 = \boxed{6 \cdot 10^8 \text{ N}}$$

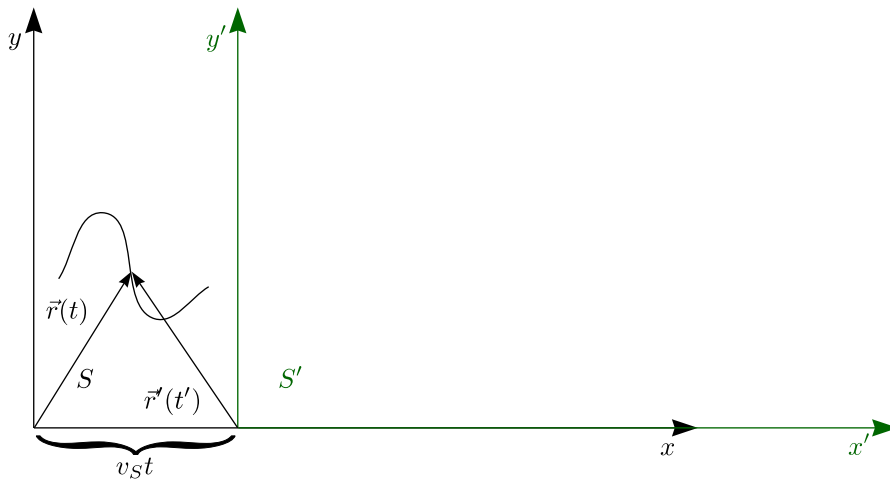
Dieses Prinzip findet Anwendung beim Antrieb von Raumschiffen mit Solarsegeln.

6.2 Relativistische Betrachtungen

6.2.1 Einige Aussagen der „Speziellen Relativitätstheorie“

1. Die physikalischen Gesetze sind in allen Inertialsystemen gleichermaßen gültig (Relativitätsprinzip).
2. Die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Inertialsystemen gleich.

Erinnerung: Galileitransformation



$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

Es folgt nun:

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v$$

Damit gilt $c' = c - v$; dies ist jedoch ein Widerspruch zum MICHELSON-MORLEY-Experiment 1887.

Lorentztransformation:

S' bewegt sich in x -Richtung:

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right), \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \beta = \frac{v}{c}$$

Daraus ergeben sich nun folgende Konsequenzen:

* Längenkontraktion:

$$L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

* Zeitdilatation:

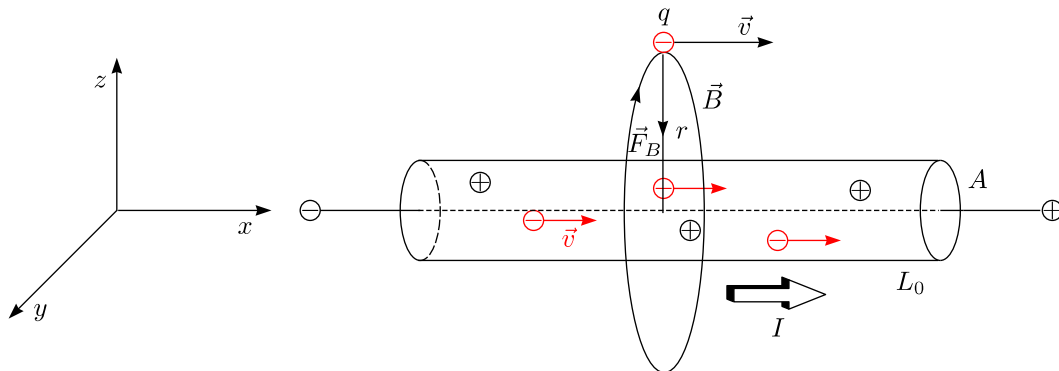
$$\Delta t' = \Delta t \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Ein sehr schönes Beispiel hierfür ist die Lebensdauer von kosmischen Myonen.

6.2.2 Abhängigkeit von elektrischen und magnetischen Feldern und deren Kräften von der Wahl des Bezugssystems

a.) Ruhender Leiter:

Betrachte Ladung q , die mit v an einem stromdurchflossenen Leiter entlangfliegt.



Es besteht elektrische Neutralität:

$$\varrho_+ = \varrho_- = 0$$

$$|\varrho_+| = |\varrho_-| = \varrho_0$$

Die magnetische Flußdichte eines stromdurchflossenen Drahtes berechnet sich nach der in Kapitel 4 hergeleiteten Formel:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Die Kraft auf $q (\equiv -e)$ lautet nun:

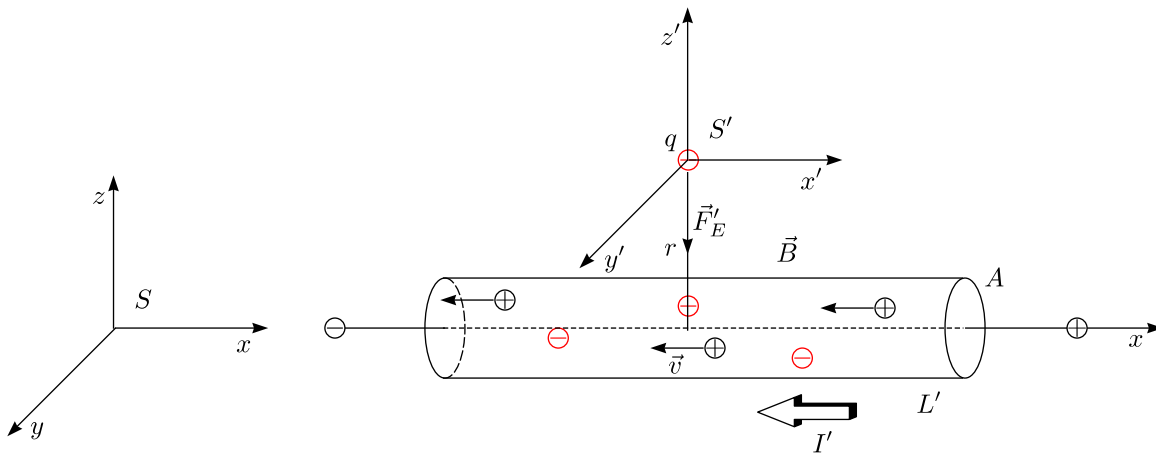
$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = -e \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Betragsmäßig gilt:

$$|\vec{F}_B| = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot v \cdot e$$

Diese Kraft zeigt zum Draht hin.

b.) Ruhende Ladung:



Positive Ladungen erzeugen I' . B' übt aber keine Kraft auf q aus, da $\vec{v}' = \vec{v}$. Für die Länge des Leiters im bewegten Bezugssystem folgt mittels der Formel für die Längenkontraktion:

$$L' = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = L_0 \cdot \frac{1}{\gamma}$$

Die Länge des Drahtes erscheint somit kürzer. Für die Ladungsdichte ergibt sich nun, da $Q = N \cdot e = \text{const.}$:

$$\rho'_+ = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q}{V'} = \frac{Q}{V_0 \cdot \frac{1}{\gamma}} = \frac{Q}{V_0} \cdot \gamma = \rho_0 \cdot \gamma > \rho_+$$

Folglich bleibt die Ladung gleich, das Volumen wird aber kleiner. Da ρ'_- im bewegten System S' ruht, gilt:

$$\rho_- = \gamma \cdot \rho'_- = -\rho_0$$

Und somit folgt im Gegensatz zur positiven Ladungsdichte:

$$\rho'_- = -\rho_0 \cdot \frac{1}{\gamma}$$

Damit gilt für die gesamte Ladungsdichte:

$$\rho'_- + \rho'_+ = \rho_0 \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = \rho_0 \cdot \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > 0!$$

Diese ist somit erstaunlicherweise nicht mehr gleich Null, wie wenn der Leiter ruht. Im System S' sieht der bewegte Beobachter ein elektrostatisches Feld.

$$E' = \frac{\rho' \cdot A}{2\pi\epsilon_0 \cdot r} = \frac{\frac{Q}{L}}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Es handelt sich um ein zylindrisches Feld.

$$E' = \rho_0 \cdot \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{A}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Für die auf die Ladung wirkende Kraft gilt:

$$F'_E = e \cdot \rho_0 \cdot \frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{A}{2\pi\epsilon_0 r}$$

Die Kraft zeigt zwar zum Draht hin, ist aber $\neq F_B$, da:

$$F_B = e \cdot \mu_0 \cdot \frac{\rho_0 A v}{2\pi r} \cdot v = \boxed{e \cdot \rho_0 \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{A}{2\pi\epsilon_0 r}}$$

Der Teufel steckt in Detail. Wir dürfen nicht die Kraft selbst vergleichen, sondern müssen uns auf die Impulsänderung durch F_B bzw. F'_E beziehen:

* System S :

$$\Delta p = F_B \cdot \Delta t = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \cdot e \cdot v^2 \cdot \frac{q_0 A}{2\pi r} \cdot \Delta t$$

* System S' :

$$\Delta p' = F'_E \cdot \Delta t' = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \cdot e \cdot v^2 \cdot \frac{q_0 A}{2\pi r \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \underbrace{\Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{\text{Rücktransformation: } \Delta t'} = \Delta p$$

Schlußfolgerung:

1. Die Messungen in S , S' sind gleich.
2. Je nach Bezugssystem sind elektrische oder magnetische Kräfte manifest.

Anhang A

Rechenregeln für den Nabla-Operator

Der Nabla-Operator ist ein Vektoroperator:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Dieser kann auf skalare Felder φ oder aber auch Vektorfelder \vec{E} , \vec{B} wirken:

$$\vec{\nabla}\varphi \equiv \text{grad } \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot } \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Hierbei gelten dann folgende Rechenregeln:

$$* \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}\varphi) = \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla}\varphi, \text{div } (\vec{A}\varphi) = \varphi \text{div } \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad } \varphi$$

$$* \vec{\nabla} \times (\vec{A}\varphi) = \varphi \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{A} \times \vec{\nabla}\varphi, \text{rot } (\vec{A}\varphi) = \varphi \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \times \text{grad } \varphi$$

$$* \vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \text{div } (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

$$* \vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})$$

$$\text{rot } (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B} + \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A}$$

$$* \vec{\nabla} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

$$\text{grad } (\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \text{grad}) \vec{B} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A}$$

$$* \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla}\varphi) \equiv \text{div } (\text{grad } \varphi) \equiv \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \text{ mit dem LAPLACE-Operator } \Delta$$

$$* \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \text{div } (\text{rot } \vec{A}) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \cdot \vec{A} \equiv 0$$

$$* \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\varphi) \equiv \text{rot grad } \varphi = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \varphi \equiv 0$$

$$* \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \text{rot rot } \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \equiv \text{grad div } \vec{A} - \Delta\vec{A}$$

Außerdem ist noch der GAUSSsche Satz

$$\int_{\text{Oberfläche}} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{E} dV$$

und der STOKESSche Satz

$$\oint_{\text{Weg}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{Fläche}} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

von großer Bedeutung in der Elektrodynamik.

Index

- Ampèresches Gesetz, 118
- Antiteilchen, 49
- Arbeit, 27
 - durch Erdanziehung, 27
 - eines elektrischen Dipols, 100
 - im elektrischen Feld, 27
 - in der Mechanik, 27
- Aufladung, 5
- Austauschteilchen, 8, 10

- Beweglichkeit, 66
 - der Ladungsträger, 66
- Biot-Savartsches Gesetz, 87
- Boltzmannformel, 68
- Boltzmannverteilung, 72

- Coulomb, 6, 13
 - Coulombbeziehung, 97
 - Coulombfeld, 23, 29, 49
 - Coulombkraft, 76
 - Coulombpotential, 30, 35
- Coulombsches Gesetz, 14–16

- Diamagnetismus, 103
- Dielektrikum, 48, 49
- Diode
 - Schaltbild, 57
- Dipol, 39, 100
 - Arbeit eines Dipols, 100
 - Dipolfeld, 89
 - Dipolmoment, 40, 42, 48, 83
 - Energie eines Dipols, 41
 - Kräfte im elektrischen Feld, 40
 - magnetisches Dipolmoment, 89
- Dipolfeld
 - Dipolfeld, 40
- Drift, 52
 - von Elektronen, 52, 85

- Effektivwert, 121
- elektrische Feldkonstante, 15
- elektrische Leitfähigkeit, 53
- elektrochemische Prozesse, 65
 - Elektrolyse, 67
- elektrochemische Stromerzeugung, 65
- elektromagnetische Wechselwirkung, 11
- Elektromotor, 84
- Elektron, 6–8, 10, 15, 55
 - Elektronenstrahl, 51
 - Hüllenelektron, 102

- Elektronen
 - Elektronenbahn, 99
 - Elektronenhülle, 98
 - Elektronenpaare, 54
 - Elektronenspin, 99
- Elektronendrift, 52
- elektrostatisches Feld, 136
- Energie, 27, 56, 132
 - einer elektromagnetischen Welle, 129
 - eines Dipols, 41
 - eines Kondensators, 47
 - Energieübertragung, 8
 - Energiedichte, 47, 120, 129
 - Energieerhaltungssatz, 28
 - Energieschwelle bei Halbleitern, 7
 - kinetische, 27, 28
 - potentielle, 27, 28, 30, 100
 - thermische, 102
 - von Feldern, 46, 119

- Faraday-Effekt, 26
- Faradaykonstante, 67
- Feld, 28
 - Coulombfeld, 23, 29
 - Dipolfeld, 40
 - Drehmoment in Magnetfeld, 83
 - einer Batterie, 22
 - einer Kugelfläche, 25
 - elektrisches, 9, 19, 20, 32, 42, 47, 51, 66, 77
 - elektromagnetisches, 8, 29
 - Feldenergie, 46
 - Fernwirkung, 8
 - homogenes, 21
 - homogenes elektrisches, 40
 - homogenes Gravitationsfeld, 28
 - inhomogenes elektrisches, 41
 - konservatives, 95
 - konservatives Kraftfeld, 28
 - Magnetfeld, 8
 - magnetische Feldstärke, 77
 - magnetisches, 62, 75, 77, 78, 85
 - einer Leiterschleife, 87
 - einer Punktladung, 86
 - eines Dipols, 89
 - eines stromdurchflossenen Leiters, 93
 - eines Stromelements, 87
 - magnetisches Moment, 100
 - Potential, 94
 - Vektorpotential, 97

- von bewegten Ladungen, 86
- von Strömen, 87
- Polarisationsfeld, 48
- Potential, 13
- Vektorfeld, 95
- Wirbelfeld, 95
- Feldquant, 11
- Fermionen, 10
- Fermiverteilung, 72
- Ferromagnet, 106
- Ferromagnetismus, 105

- Galvanometer, 62, 84
- Gluon, 11
- Gradient, 29, 33, 95
- Gravitation, 11
- Graviton, 10, 11

- Halbleiter, 7, 54, 55
- Hall-Effekt, 85
 - Hall-Konstante, 86
 - Hall-Spannung, 85
 - Hall-Widerstand, 86
 - Quanten-Hall-Effekt, 86
- Hitzedraht-Ampèremeter, 63
- Hysterese, 106

- Impedanz, 122, 123
- Impuls
 - Drehimpuls, 98
 - einer elektromagnetischen Welle, 131
 - von geladenen Teilchen, 80
- Induktion, 8, 110
 - eines magnetischen Momentes, 103
 - Induktionsgesetz, 110, 114
 - Induktionsspannung, 111
- induktiver Widerstand, 124
- Induktivität, 114
- Induktivität
 - Selbstinduktivität, 116
- Influenz, 42
- Intensität, 132
 - einer elektromagnetischen Welle, 129, 130
 - Intensitätsvektor, 130
- Ionen, 65, 68
 - Abscheidung, 67
 - Ionenwanderung, 66
 - Konzentration, 68

- Kapazität
 - einer Kugel, 45
 - eines Kondensators mit Dielektrikum, 49
- kapazitiver Widerstand, 122
- Kathode, 67, 71
- kinetische Energie, 27, 28
- Kirchhoffsche Gesetze, 58, 122
- Kondensator, 42, 45
 - an Wechselspannung, 122

- Aufladung, 60, 119
- Energie, 47
- Entladung, 61, 64
 - mit Dielektrikum, 49
 - mit Spule und Widerstand, 125
- Parallelschaltung, 46
- Plattenkondensator, 43, 47, 120
- Schaltbild, 57
- Serienschaltung, 46
- Kontaktspannung, 71
- Kontinuitätsgleichung, 52
- Kraft, 27, 28
 - auf ein magnetisches Moment, 100
 - auf Ladung, 131
 - auf Leiterschleife, 82
 - Coulomb- und Gravitationskraft, 15
 - durch eindimensionale Ladungsverteilung, 18
 - durch Flächenladungsverteilung, 17
 - durch kontinuierliche Ladungsverteilung, 16
 - durch unendlich große Fläche, 18
 - einer Ladung, 52, 135, 136
 - eines Dipols, 41
 - elektrische, 8
 - elektromagnetische, 6, 13
 - Erdanziehungskraft, 27
 - konservatives Kraftfeld, 28
 - Kraftübertragung, 8
 - Kraftteilchen, 11
 - Kraftwirkung, 8
 - Ladungsverteilung, 19
 - Lorentzkraft, 77, 81
 - magnetischer Kraftfluß, 96
 - zwischen punktförmigen Ladungen, 16
 - zwischen stromdurchflossenen Leitern, 7, 92
- Kraftteilchen, 11
- Kreisgüte, 125

- Ladung, 5, 6, 26
 - Bewegung im elektrischen Feld, 20
 - eindimensionale Ladungsverteilung, 18
 - eines Ions, 67
 - elektrische, 6
 - Elementarladung, 6
 - Erhaltung der Gesamtladung, 6
 - Flächenladungsdichte, 48
 - Flächenladungsverteilung, 17
 - homogene Ladungsverteilung, 36
 - kontinuierliche Ladungsverteilung, 16
 - Kräfte durch Ladungen, 16
 - Ladungsdichte, 17, 38
 - Flächenladungsdichte, 17
 - Ladungserhaltung, 52
 - Ladungsquantelung, 6
 - Ladungsträger, 7
 - Ladungsträgerdichte, 85
 - Ladungstrennung, 7, 85
 - Magnetfelder von bewegten Ladungen, 86
 - magnetische, 76

- negative, 6
- positive, 6
- Punktladung, 19
- Punktladung im Magnetfeld, 77
- spezifische, 78
- Leitfähigkeit
 - elektrische, 53
- Leitungsband, 55
- Leitwert, 53
- Lenzsche Regel, 104, 110
- Lepton, 10
 - Tau-Lepton, 10
- Lorentzkraft, 77, 81
- Lorentztransformation, 134
- Loschmidtzahl, 67
- Magnet, 76
 - Kräfte, 76
 - Permanentmagnet, 76, 110
- Magnetfeld, 8
 - statisches, 75
- magnetische Falle, 79
- magnetische Flasche, 79
- magnetische Induktion, 8, 110
 - Induktionsgesetz, 110, 114
- magnetisches Moment, 103
- Magnetismus, 5
 - Diamagnetismus, 103
- Magnetodynamische Stromerzeugung, 65
- Maschenregel, 58
- Meßinstrumente, 62
- Michelson-Morley-Experiment, 134
- Multipol, 39
- Myon, 10
 - Lebensdauer, 135
- Neutrino, 6
- Neutron, 6, 10
- Ohmscher Widerstand
 - mit Kondensator, 123
 - mit Spule und Kondensator, 125
 - Schaltbild, 56
 - Wechselspannung, 121
- Ohmsches Gesetz, 52
- Parallelschaltung
 - von Kondensatoren, 46
 - von Widerständen, 59
- Paramagnetismus, 102
 - paramagnetische Materialien, 103
- Peltiereffekt, 72
- Permanentmagnet, 76, 110
- Permeabilität
 - relative, 99
- Permeabilitätskonstante, 77
- Phasenverschiebung, 123
 - bei Wechselspannung, 118
- Photoeffekt, 8, 65
- Photon, 6, 8, 10, 11
 - virtuelle, 9
- Plancksches Wirkungsquantum, 99
- Plattenkondensator, 43, 47, 120
- Positron, 6
- Potential, 27
 - des elektrischen Feldes, 13
- potentielle Energie, 27, 28, 30, 100
- Potentiometer, 57, 60
- Poynting-Vektor, 130
- Proton, 6
 - Coulombkraft, 15
 - Coulombkraft, 15
 - im Goldatom, 31
 - im Zyklotron, 80
- Punktladung, 19
 - im Magnetfeld, 77
 - Magnetfeld, 86
- Quantelung
 - des Widerstandes, 86
 - für Ladungen, 6
 - Spannung, 86
- Quark, 10
- Quellenfeld, 96
- Reduktion, 67
- relative Permeabilität, 99
- Remanenz, 106
- Resonanz, 125
 - Resonanzkurve, 125
- schwache Wechselwirkung, 11
- Schwingkreis, 124
- Selbstinduktivität, 116
- Serienschwingkreis, 124
- Spannung, 27, 31, 54, 55, 57
 - Berührungsspannung, 65
 - Hall-Spannung, 85
 - Induktionsspannung, 111
 - Kontaktspannung, 71, 72
 - Quantelung, 86
 - Spannungsquelle, 58
 - Schaltbild, 57
 - Spannungsumwandlung, 65
 - Wechselspannung, 118, 121
 - am Kondensator, 122
 - an Spule, 124
 - Wechselspannungserzeugung, 113
- Spin
 - eines Elektrons, 99
- Spule, 63, 94, 100, 115, 116
 - an Wechselspannung, 124
 - Energiedichte, 120
 - im Magnetfeld, 84
 - mit Kondensator und Widerstand, 125
 - Schaltbild, 57

- sehr lange Spule, 90
- Selbstinduktivität, 116
- Stromkreis mit Widerstand, 116
- Zylinderspule, 89
- starke Wechselwirkung, 11
- Strahlungsdruck, 132
- Strom, 5, 7, 51, 55, 84, 85
 - Definition, 92
 - Hausstrom, 121
 - im Supraleiter, 51
 - Kontinuitätsgleichung, 52
 - Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern, 91
 - Kraft zwischen stromdurchflossenen Leitern, 7
 - Maxwellscher Verschiebungsstrom, 118
 - Stromdichte, 51, 66
 - Stromerzeugung, 65, 69
 - Stromkreis mit Widerstand und Spule, 116
 - Stromleistung, 56
 - Strommessung, 84
 - Stromquellen, 65
 - Stromstärke, 7
 - Stromverstärker, 63
 - Wechselstrom, 121
 - Wirbelströme, 112
- Superpositionsprinzip, 6, 13, 16, 39
- Supraleiter, 51
- Supraleitung, 54
- Suszeptibilität
 - dielektrische, 48
 - magnetische, 99
- Synchrotron, 80
- Teilchen, 6, 27
 - Austauschteilchen, 8, 10
 - im Coulombpotential, 35, 36
 - Impulsbestimmung, 80
 - kinetische Energie, 28
 - Kraftteilchen, 11
 - Materieteilchen, 10
 - potentielle Energie, 28
 - relativistisch, 80
 - Teilchenbeschleuniger, 79
- Transformator, 117
- Valenzband, 55
- Vektorfeld, 95
- Verschiebungsstrom, 118
- Verstärker, 45
- Widerstand
 - induktiver, 124
- Wechselspannung
 - am Kondensator, 122
 - am ohmschen Widerstand, 121
 - an Spule, 124
 - Phasenverschiebung, 118
 - Wechselspannungserzeugung, 113
- Wechselstrom, 121
- Weicheisen-Instrument, 63
- Welle
 - elektromagnetische, 5, 127, 132
 - Impuls, 131
 - Intensität, 129, 130
 - Strahlungsdruck, 132
- Wheatstone-Brücke, 60
- Widerstand
 - elektrischer, 53
 - Hall-Widerstand, 86
 - induktiver, 124
 - Innenwiderstand, 113
 - kapazitiver, 122
 - Leistung, 122
 - ohmscher
 - Schaltbild, 56
 - Quantelung, 86
 - spezifischer, 53, 54, 66
 - Wechselspannung, 121
 - Widerstandsnormal, 86
- Wirbelfeld, 95
- Wirbelströme, 112
- Zyklotron, 79, 80
 - Zyklotronfrequenz, 78